

## 3. Das Vektorprodukt

### 3.1. Definition und Berechnung des Vektorprodukts

#### 1. Definition

Gegeben sind zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  im Raum.

Man definiert den Vektor  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  wie folgt:



Das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt von zwei Vektoren gibt es nur im dreidimensionalen Raum.

#### 2. Eigenschaften

a)  $\vec{a} \times \vec{b} = \dots\dots\dots$

b) Wenn  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  kollinear sind, dann  $\dots\dots\dots$

#### 3. Bemerkung

Mathematisch saubere Sprechweise: Wenn zwei Vektoren kollinear sind, dann ergibt das Vektorprodukt dieser beiden Vektoren nicht Null, sondern dann ergibt das Vektorprodukt der beiden Vektoren den Nullvektor.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren kann Null ergeben, das Vektorprodukt nie.

#### 4. Einheitsvektoren



## 5. Berechnung des Vektorprodukts

Hier folgt die Herleitung der Formel, wie man das Vektorprodukt von zwei gegebenen

Vektoren  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$  berechnet. Es ist  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$



## 6. Beispiele

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ a \\ -b \end{pmatrix} =$$

**Übungen**

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a \\ -3a \\ 3b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2a \\ -4a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix} =$$

### 3.2. Anwendungen des Vektorprodukts

#### 1. Senkrecht stehende Vektoren

- a) Bestimme einen Vektor der Länge 3, welcher auf  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  senkrecht steht.
- b) Wie viele Lösungen hat die obige Aufgabe?



#### 2. Flächen berechnen

- a) Vom Parallelogramm  $ABCD$  kennt man  $A(2|1|5)$ ,  $B(4|4|7)$ ,  $C(3|8|2)$ .  
Berechne die Fläche dieses Parallelogramms.
- b) Berechne die Fläche des Dreiecks  $A(4|1|3)$ ,  $B(2|5|4)$ ,  $C(3|-2|0)$ .
- c) Das Dreieck  $A(3|1|1)$ ,  $B(2|4|0)$ ,  $C(1|t|4)$  hat Fläche 12.  $t = ?$



3. **Eine zweidimensionale Aufgabe**

Berechne die Fläche des Parallelogramms  $A(2| - 3)$   $B(5|0)$   $C(4|8)$   $D(1|5)$  .  
 Wie macht man aus dieser zweidimensionalen Aufgabe eine dreidimensionale?



**Gleichschenkliges Trapez**  
 Die vier Punkte  $A(-4| - 4)$  ,  $B(5| - 1)$  ,  $C(0|4)$  ,  $D(-3|3)$  sind  
 Eckpunkte eines gleichschenkligen Trapezes  $ABCD$  .  
 Berechne seine Fläche (mit Hilfe des Vektorprodukts).

4. **Komplanare Vektoren**

Zeige, dass die Vektoren  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  ,  $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$  komplanar sind.

Drei Vektoren sind komplanar, wenn .....

.....

Es gibt zwei Lösungsansätze:



5. **Vier Punkte**

Wie kann man mit Hilfe des Vektorproduktes entscheiden, ob vier Punkte in einer Ebene liegen?

.....

- a) Liegen  $A(2|1|8)$ ,  $B(3|7|9)$ ,  $C(4|3|6)$  und  $D(6|1|0)$  in einer Ebene?
- b)  $A(2|1|8)$ ,  $B(3|7|9)$ ,  $C(4|t|6)$  und  $D(6|1|0)$  liegen in einer Ebene.  $t = ?$



**Lernkontrolle**

Gegeben sind die Punkte  $A(2|1|4)$ ,  $B(5|7|10)$ ,  $C(6|8|11)$  und  $D(4|4|7)$ .

- a) Weise nach, dass die vier Punkte in einer Ebene liegen.
- b) Zeige, dass es sich bei  $ABCD$  um ein Trapez handelt und berechne seine Fläche. (Hinweis: Zerlege das Trapez in zwei Dreiecke.)

**6. Würfel**

Von einem Würfel mit Bodenfläche  $ABCD$  und Deckelfläche  $EFGH$  kennt man  $A(1|6|3)$ ,  $B(5|2|5)$  und  $C(7|6|9)$ .

Bestimme die Koordinaten aller anderen Würfecken.

