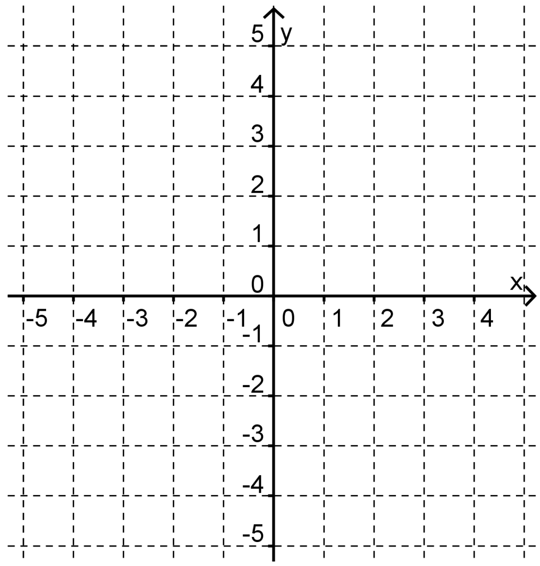
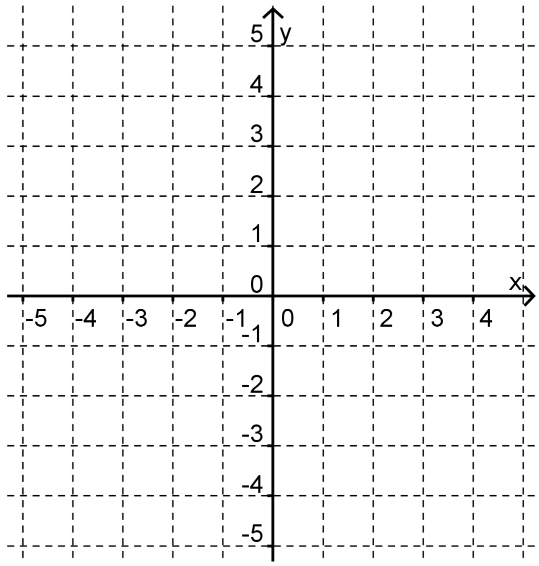
# 3. Erweiterung der trig. Funktionen

## 3.1. Polarkoordinaten

1. **Rechtwinklige und Polarkoordinaten**

   Üblicherweise gibt man die Koordinaten eines Punktes in der Ebene durch ein Zahlenpaar vor: $P(\,x\,|\,y\,)$ .
   Die erste Zahl ist dabei die $x$-Koordinate, die zweite Zahl die $y$-Koordinate. Man spricht dann von rechtwinkligen Koordinaten (weil die Koordinatenachsen zueinander senkrecht stehen) oder auch von kartesischen Koordinaten (benannt nach dem französischen Mathematiker René Descartes).
   Es gibt aber auch noch eine andere Möglichkeit, einen Punkt in der Ebene eindeutig festzulegen, indem man den Abstand des Punktes zum Ursprung sowie den Winkel $\alpha$ (immer von der positiven $x$-Achse aus im Gegenuhrzeigersinn gemessen) angibt. Man nennt diese Form Polarform und somit ist $P(\,r\,;\,\alpha\,)$ in Polarkoordinaten dargestellt. Dabei ist $r > 0$.




2. **Einfache Umrechnungen**

   Wandle in die andere Koordinatenform um: Arbeite möglichst ohne Taschenrechner.

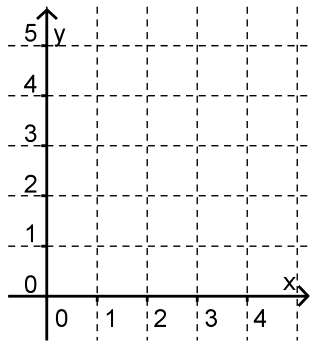
   a) $A(\,4\,|\,4\,)$ ..........
   b) $B(\,-3\,|\,3\,)$ ..........
   c) $C(\,0\,|\,-5\,)$ ..........
   d) $D(\,2\,;\,180°\,)$ ..........
   e) $E(\,4\,;\,120°\,)$ ..........

   Für die letzten beiden Aufgaben ist der Einsatz des Taschenrechners sinnvoll.

   f) $F(\,5\,|\,1\,)$ ..........
   g) $G(\,6\,;\,75°\,)$ ..........

3. **Zusammenhänge**

Für einen Punkt im I. Quadranten gelten zwischen den Polarkoordinaten $P(\,r\,;\,\alpha\,)$ und den rechtwinkligen Koordinaten $P(\,x\,|\,y\,)$ folgende Zusammenhänge:




4. **Erweiterung**

Es macht Sinn, die gefundenen Beziehungen zwischen rechtwinkligen und Polarkoordinaten auch für stumpfe und überstumpfe Winkel zu übernehmen.
Allerdings ist dann gewisse Vorsicht geboten. So haben beispielsweise die Punkte $A(\,5\,|\,2\,)$ und $B(\,-5\,|\,2\,)$ dieselben $y$-Koordinaten.

**Umwandlungen**

Bestimme die andere Koordinatenform:
$P(\,-1\,|\,-1\,)$
$Q(\,6\,;\,30°\,)$

## 3.2. Trigonometrische Funktionen für beliebige Winkel

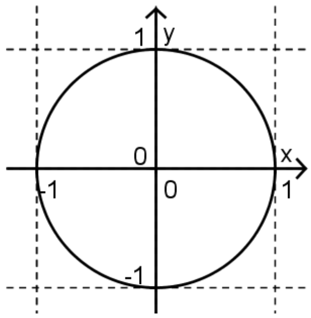
1. **Der Einheitskreis**

   Der Einheitskreis ist der Kreis mit Radius 1, dessen Zentrum im Koordinatenursprung liegt.
   Wenn der Punkt $P$ im I. Quadranten auf dem Einheitskreis liegt, dann gilt:

   ......................................................

   ......................................................

   Es liegt nahe, diese Eigenschaft für jeden Punkt auf dem Einheitskreis zu übernehmen.




2. **Definition**

   Für jeden Winkel $\alpha$ gilt:

   ..........................................................................

   Weiter ist für jeden Winkel $\alpha$: ..........................................

   Somit sind die trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel festgelegt.

3. **Einfache Berechnungen**

   a) $\sin(234.56°) =$ ..........................................................
   b) $\cos(234.56°) =$ ..........................................................
   c) $\tan(123.45°) =$ ..........................................................

4. **Überlegungsaufgaben**

   Was kann man über einen Winkel $\alpha$ aussagen, wenn $\sin(\alpha) < 0$ ist?

   ..........................................................................

   Und was weiss man über den Winkel, wenn dessen Cosinus-Wert negativ ist?

   ..........................................................................

5. **Die Quadrantenrelationen**

| Winkel $\alpha$ | $= 0°$ | | $90°$ | | $180°$ | | $270°$ | | $360°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quadrant | | I | | II | | III | | IV | |
| $\sin(\alpha)$ | | | | | | | | | |
| $\cos(\alpha)$ | | | | | | | | | |
| $\tan(\alpha)$ | | | | | | | | | |

6. **Begriffe zu Winkeln**

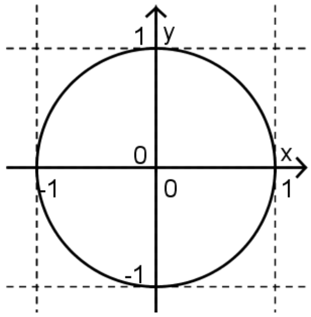
Zwei Winkel heissen Supplementwinkel, wenn ....................................

..........................................................................................

Zwei Winkel heissen Komplementwinkel, wenn ....................................

..........................................................................................

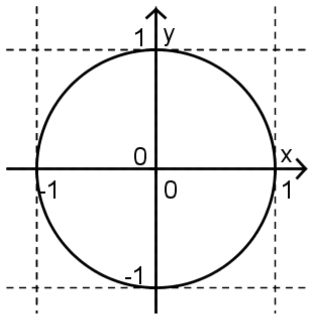
7. **Supplementwinkel**



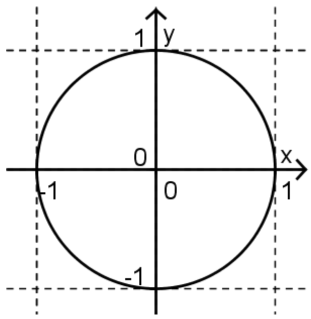

8. **Berechnung**

$\sin(150°) =$ ..........................................................................

9. **Komplementwinkel**




10. **Negative Winkel**

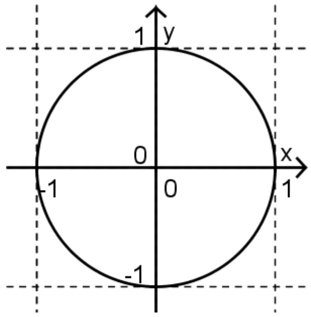



11. **Berechnung**

$\tan(-45°) =$ ..........................................................................

12. **Tangens**

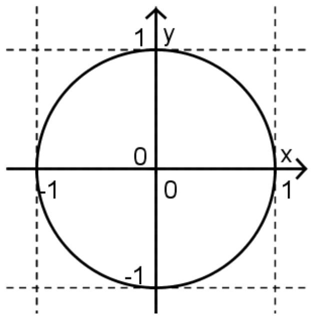
Für den Tangens gibt es eine geometrische Deutung:



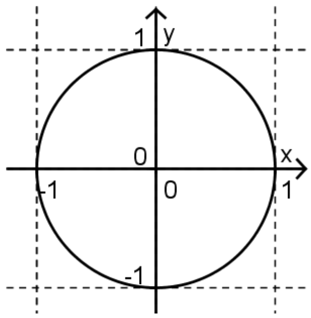

13. **Umkehrfunktionen**

Nun können wir auch die Umkehrfunktionen arcsin, arccos und arctan bei beliebigen Winkeln betrachten. Wir haben in einem früheren Beispiel bereits gesehen, dass $\sin(150°) = \frac{1}{2}$ ist. Allerdings ist auch $\sin(30°) = \frac{1}{2}$.
Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind nicht eindeutig.

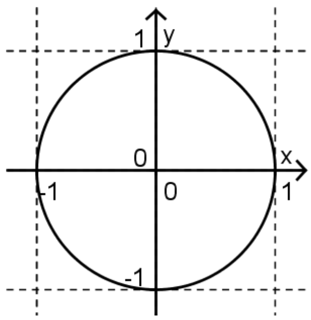
14. **Arcus-Sinus**




15. **Arcus-Cosinus**




16. **Arcus-Tangens**



17. **Übungen**

   a) Bestimme $\tan(300°) =$ ohne Taschenrechner.

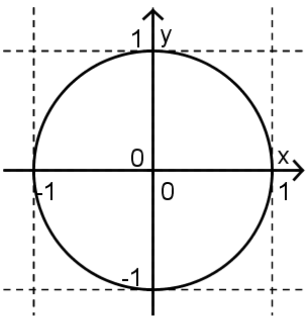
   b) Bestimme $\cos(225°) =$ ohne Taschenrechner.

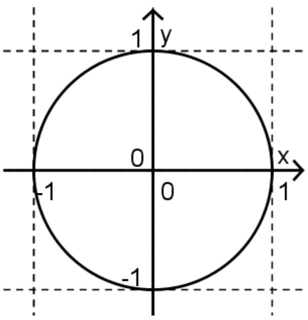
   c) Für welche Winkel $\alpha$ ist $\sin(\alpha) = 0.1$?

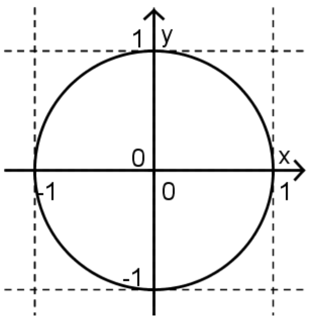
   d) Für welche Winkel $\beta$ ist $\cos(\beta) = -0.2$?

18. **Beziehungen**

   Nun können wir die drei trigonometrischen Funktionen untereinander ausdrücken.



19. **Übungen**
   a) Man kennt $\cos(\varepsilon) = -0.6$. Berechne alle Lösungen für $\varepsilon$, $\sin(\varepsilon)$, $\tan(\varepsilon)$.
   b) Man kennt $\sin(\alpha) = 0.6$. Berechne $\cos(\alpha)$, ohne den Winkel zu berechnen.
   c) Berechne $\sin(\varepsilon)$, wenn $\tan(\varepsilon) = 2$ gegeben ist.

20. **Steigungswinkel einer Geraden**
   Zwischen der Steigung und dem Steigungswinkel einer Geraden gilt die Beziehung:

   ..........................................................................

   Berechne folglich den Steigungswinkel der Geraden $y = -1.3 \cdot x + 2.5$.

   ..........................................................................

21. **Anwendung: Zwischenwinkel**
   Berechne den spitzen Winkel zwischen den Geraden.
   a) $y = 4x - 6$ und $y = 2x + 6$
   b) $y = 2x - 7$ und $y = -3x + 22$

**Lernkontrolle**

a) $\cos(150°) = ?$
b) Bestimme alle Winkel $\alpha$, für die $\sin(\alpha) = 0.4$.
c) Für welche Winkel $\beta$ ist $\cos(\beta) < 0$ und gleichzeitig $\tan(\beta) > 0$?
d) Berechne den spitzen Schnittwinkel zwischen den Geraden
   $y = \frac{1}{3} \cdot x$ und $y = -\frac{1}{2} \cdot x + 7$

## 3.3. Bogenmass

1. **Gradmass und Bogenmass**

   Wenn man die Graphen der trigonometrischen Funktionen aufzeichnen will, dann verwendet man auf der $x$-Achse zunächst das Gradmass, was aber mathematisch nicht präzise ist, denn auf der $x$-Achse sollte man eine Länge abtragen können und nicht einen Winkel.
   Zu jedem Winkel gehört aber auch ein Bogen. Dieser Bogen beginnt im Punkt $(\,1\,|\,0\,)$ und wird auf dem Einheitskreis gemessen. Zum Winkel $\alpha = 360°$ gehört also der ganze Kreis, somit ist der Bogen $b = 2\pi$.
   Das Umrechnen gestaltet sich einfach, da es sich um eine direkte Proportion handelt.

   Es gilt $\dfrac{\alpha}{360°} = \dfrac{b}{2\pi}$

2. **Umrechnung**

   Fülle die Tabelle aus:

| Winkel $\alpha$ | 180° | 60° | 15° | | | | 300° | | 108° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bogen $b$ | | | | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{5}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | | $\frac{7\pi}{20}$ | |

3. **Trigonometrische Funktionen im Bogenmass**

   Fülle die Tabelle aus:

| | Winkel $\alpha$ | Bogen $b$ | sin | cos | tan |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | | $\frac{2\pi}{3}$ | | | |
| b) | | $\frac{7\pi}{4}$ | | | |

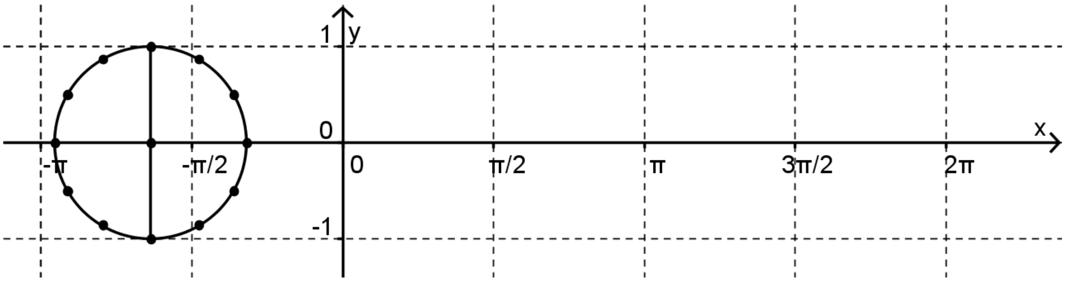
**Freiwillige Übung**

Fülle die Tabelle aus:

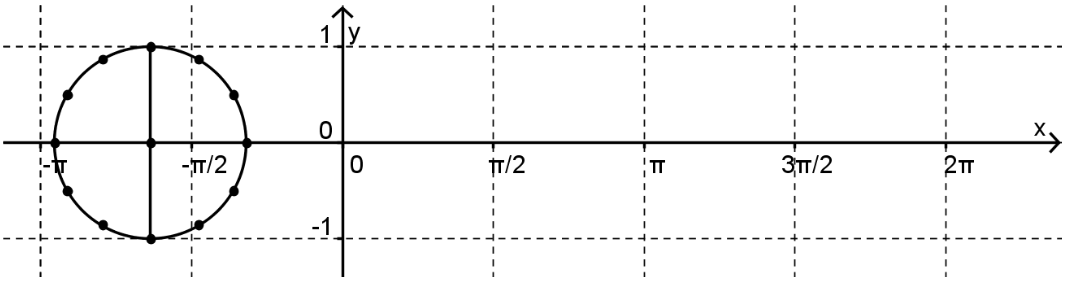
| Winkel $\alpha$ | Bogen $b$ | sin | cos | tan |
|---|---|---|---|---|
| 36° | | | | |
| | $\frac{5\pi}{4}$ | | | |
| $\alpha > 90°$ | | 0.8 | | |

## 3.4. Funktionsgraphen

1. **Sinus**




2. **Cosinus**




3. **Tangens**