

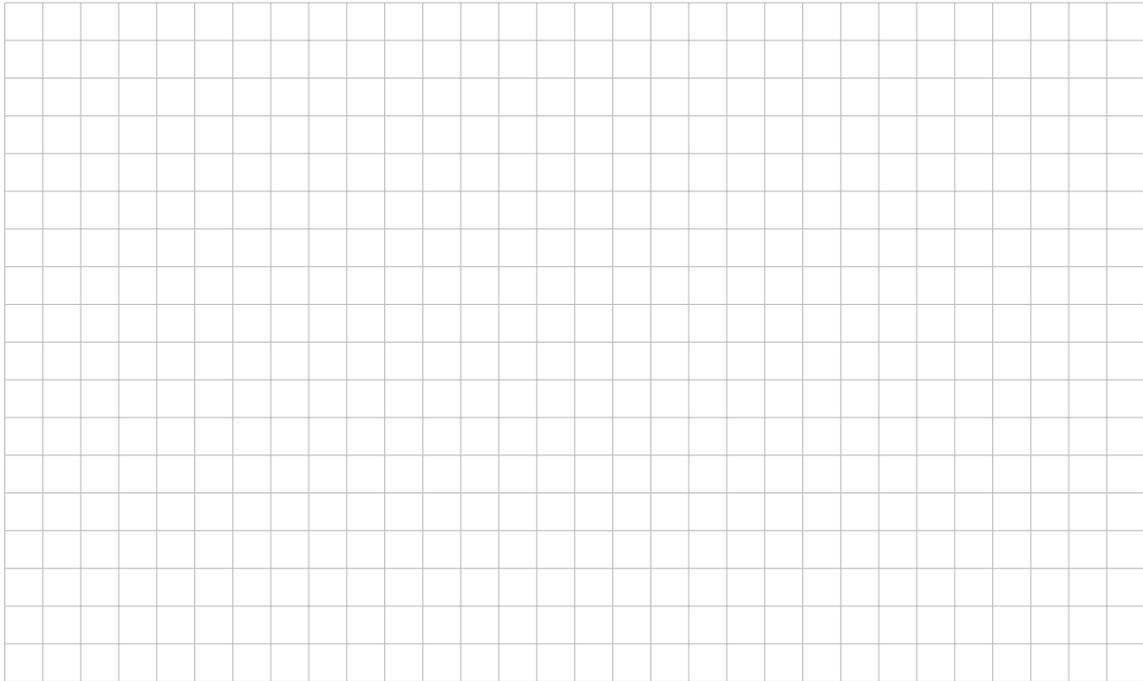
4. **Übungen**

Bestimme jeweils Mittelpunkt und Radius der Kugel.

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6z - 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 8y - 16z - 208 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + y - 1 = 0$

5. **Beachte die Formen der Kugelgleichung**

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$. Bestimme M und r .

b) $M(4|2|-3)$, $r = 3$. Bestimme die Kugelgleichung.

**Lernkontrolle**

a) Bestimme die Kugelgleichung: $M(3|6|-2)$, $P(-2|3|2)$.
 P liegt auf der Kugeloberfläche.

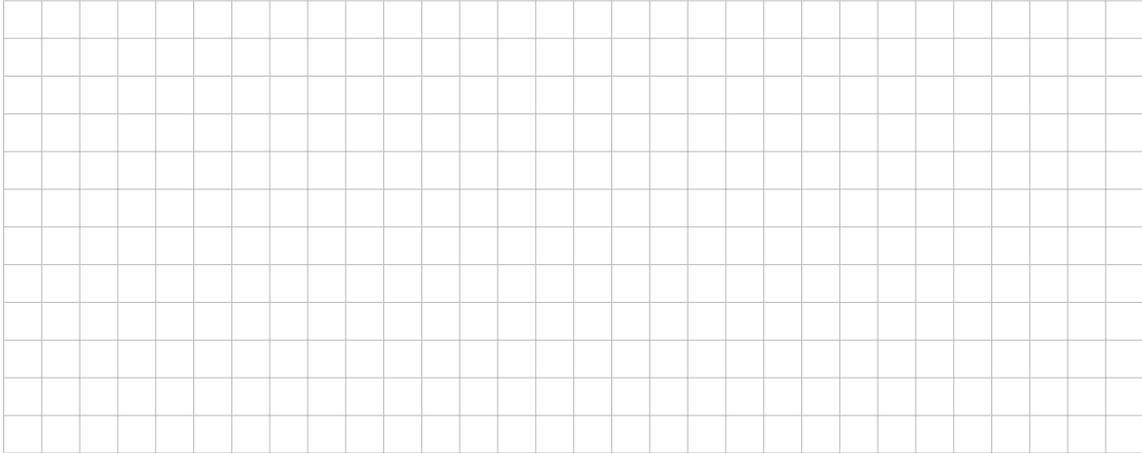
b) Bestimme Zentrum und Radius: $x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y + 3z - 6 = 0$

5.2. Anwendungen

1. Tangentialebene

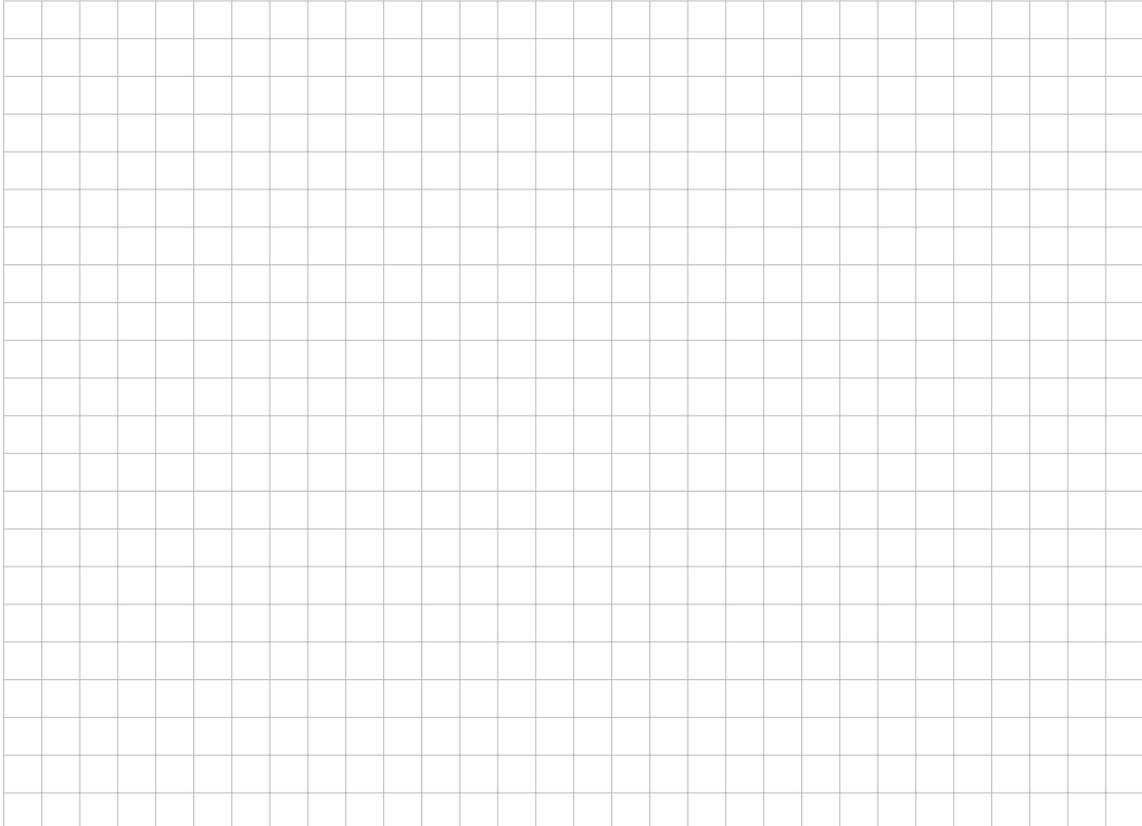
Von einer Kugel kennt man das Zentrum $M (5 | 1 | 3)$ und einen Punkt $P (3 | 7 | 0)$ auf der Kugelfläche.

Gesucht ist die Tangentialebene im Punkt P .



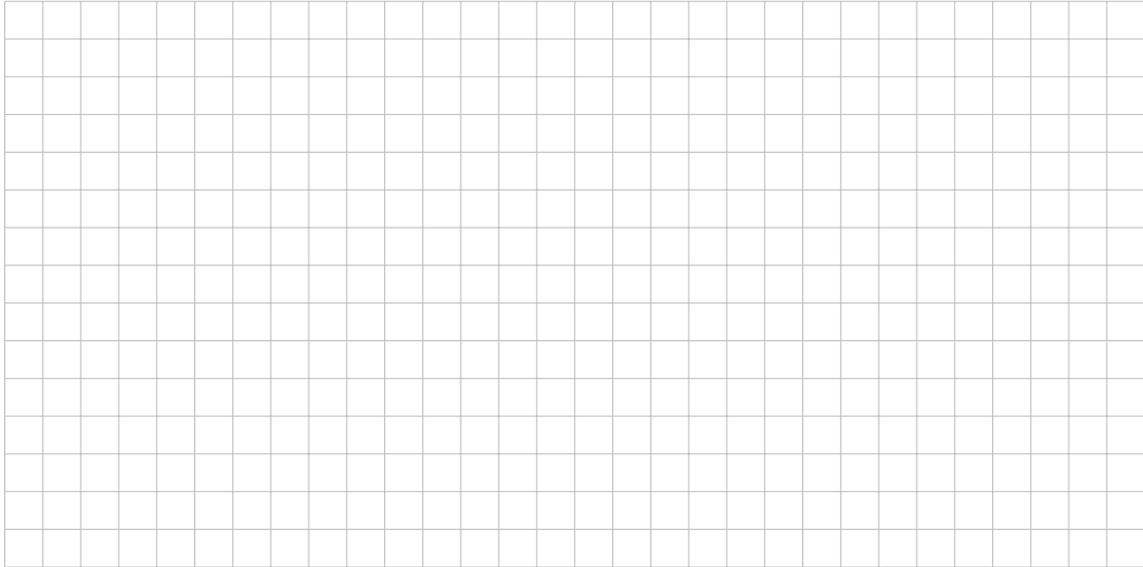
2. Schnittpunkt und Schnittwinkel

In welchen Punkten und unter welchem Winkel schneidet die Gerade g die Kugel k ?
 $g: (-1 | 1 | 4) (7 | -5 | 8)$; $k: M (1 | 1 | 0), r = 7$.



3. Berührung zweier Kugeln

Was kann man über zwei sich berührende Kugeln aussagen?

**4. Beispiel**

Gegeben sind die Kugeln $k_1: x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 10y - 15 = 0$

und $k_2: x^2 + y^2 + z^2 - 14x - 4y + 49 = 0$.

Weise nach, dass sich die Kugeln berühren und bestimme den Berührungspunkt.

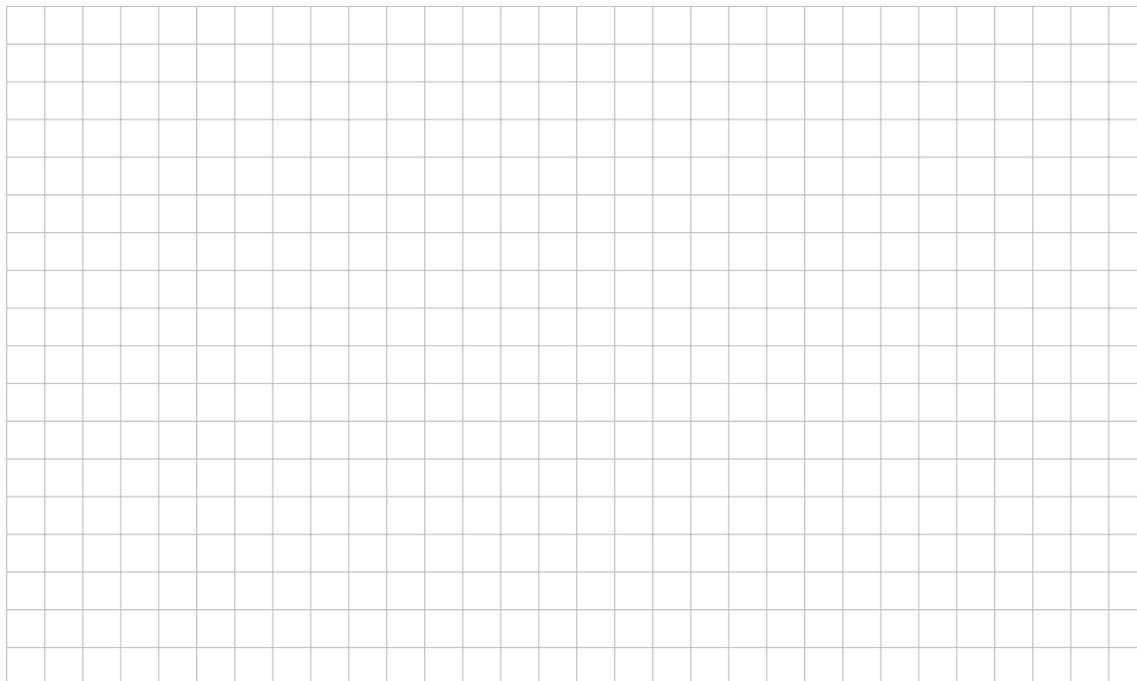


5. Minimaler Abstand

Gegeben sind die Kugeln $k_1: x^2 + y^2 + z^2 - 1296 = 0$

und $k_2: M_2 (6 | -3 | -6), r_2 = 18$.

Bestimme den kürzesten Abstand zwischen den beiden Kugeln sowie die Koordinaten der beiden am nächsten beieinanderliegenden Punkte (auf den beiden Kugelflächen).

**6. Grösste Entfernung**

Gegeben sind die Punkte $A (5 | 1 | 6)$ und $B (7 | 5 | 2)$ sowie

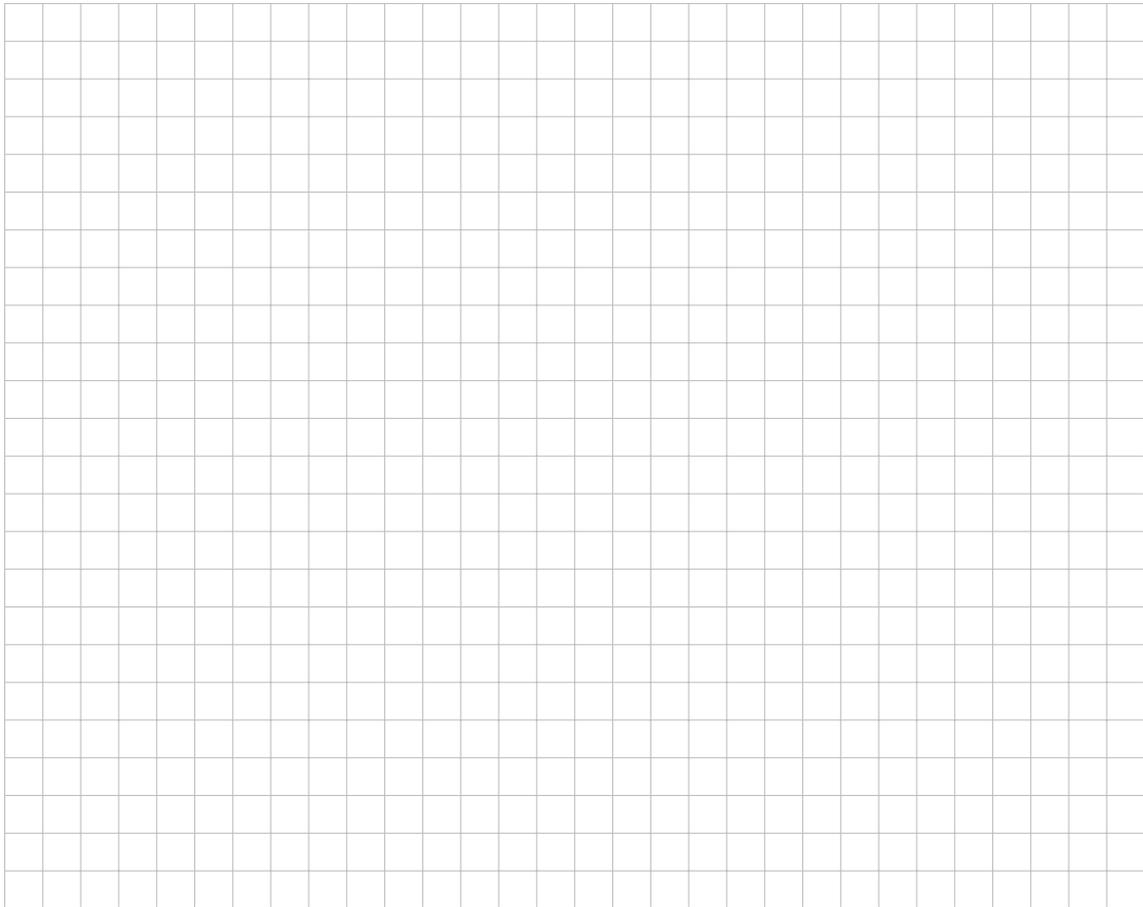
die Ebene $\varepsilon: x - 4y + 8z - 8 = 0$.

Welcher Punkt der Kugel mit Durchmesser AB ist am weitesten von der Ebene ε entfernt?



7. Die Apolloniuskugel

Behauptung: Die Punkte, die von $A (0 | -1 | 6)$ dreimal so grossen Abstand haben wie von $B (12 | 3 | -2)$, liegen auf einer Kugel. Beweis?

**Lichtstrahl**

Gegeben sind $A (4 | -10 | 8)$ und $B (5 | -6 | 7)$ sowie die Kugel $k: M (6 | 10 | 0), r = 6$.

Ein von A ausgehender Lichtstrahl geht durch B und trifft dann im Punkt R auf die Kugel, wo er an der Kugel reflektiert wird.

- Bestimme die Koordinaten des Punktes R .
- Bestimme den Richtungsvektor des reflektierten Strahls.
Hinweis: Eine Reflexion an der Kugel ist dasselbe wie eine Reflexion an der Tangentialebene (im Punkt R).