

5. Kugeln

5.1. Die Koordinatengleichung einer Kugel

1. Kugelgleichung

- $M(4 | -1 | 2)$, $r = 5$
- $M(2 | -3 | -4)$, $r = \sqrt{2}$
- Weil $r^2 < 0$ ist, erfüllt kein Punkt des Raumes diese Gleichung.
- $M(2 | -1 | -\frac{1}{2})$, $r = \frac{3}{2}$
- $M(-2 | \frac{1}{2} | 5)$, $r = \frac{9}{2}$

2. Kugeln

- $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 36$
- $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 8)^2 = 49$
- $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 69$

5.2. Anwendungen

1. Tangentialebenen

- $6x + 3y - 2z - 35 = 0$ und $6x + 3y - 2z + 63 = 0$
Berührungspunkte $(8 | -3 | 2)$ resp. $(-4 | -9 | 6)$
- $2x - 6y + 3z - 3 = 0$ oder $2x - 6y - 3z + 21 = 0$
Berührungspunkte $(0 | 0 | 1)$ resp. $(0 | 0 | 7)$

2. Schnittpunkte und Schnittwinkel

- $S_1(9 | 2 | 3)$, $S_2(16 | -1 | 3)$, $\alpha = 12.044^\circ$.
- $S(7 | -1 | 2)$, die Gerade ist Kugeltangente.
- $S_1(8 | -3 | 2)$, $S_2(-1 | 0 | 2)$, $\alpha = 42.659^\circ$.
Hinweis: $M(2 | -6 | 4)$, $r = 7$.

3. Kugel und Gerade (Aus einer Prüfung)

- $M(-9 | 8 | -10)$, $r = 17$
- $S_1(3 | 9 | 2)$, $S_2(3 | 16 | -1)$, $\alpha = 12.94^\circ$

4. Anwendung

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 1)^2 = 35$$

5. Grösster Abstand

$$(8 | 4 | -9)$$

6. Berührung

$$t_1 = 13, t_2 = -71$$

$$\text{Hinweis: } M_1(2 \mid -6 \mid 4), r_1 = 7, M_2(3 \mid -4 \mid 2), r_2 = \sqrt{29 - t}$$

7. Zwei sich berührende Kugeln (Aus einer Prüfung)

$$\text{a) } r_2 = 5, B\left(\frac{23}{3} \mid -\frac{1}{3} \mid \frac{29}{3}\right).$$

$$\text{b) } Q_1\left(-\frac{5}{3} \mid \frac{13}{3} \mid \frac{1}{3}\right) \quad Q_2\left(\frac{43}{3} \mid -\frac{11}{3} \mid \frac{49}{3}\right)$$

8. Umkugel

$$(x - 6)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 27 \text{ oder } (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = 27$$

9. Zwei Tangentialebenen

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z + 9)^2 = 49 \text{ oder } (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 1$$

Hinweis: Das gesuchte Zentrum hat zu beiden Ebenen gleiche Entfernung.

10. Tangentialebenen (Aus einer Prüfung)

$$\varepsilon: 4x - 4y + 7z - 125 = 0 \text{ mit Berührungspunkt } B(5 \mid -7 \mid 11) \text{ oder}$$

$$\varepsilon: 4x - 4y + 7z + 37 = 0 \text{ mit Berührungspunkt } B(-3 \mid 1 \mid -3)$$

$$\text{Hinweis: } M(1 \mid -3 \mid 4), r = 9$$

11. Schneidende Kugeln

$$r = \sqrt{20}$$

Hinweis: r ist der kürzeste Abstand von P zur Geraden durch die beiden Zentren.

12. Kugel berührt Gerade

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z + 5)^2 = 9$$

$$\text{Zusatz: } B(2 \mid 1 \mid -3)$$

13. Strecke

$r = \sqrt{35}$, $P(6 \mid 10 \mid 1)$, $Q(2 \mid 6 \mid 3)$ Hinweis: M hat zu g einen Abstand von 6 und der Lotfußpunkt ist Mittelpunkt der gesuchten Strecke.

14. Kugel und Ebene (Aus einer Prüfung)

$$\text{a) } t = 13$$

$$\text{b) } t = 9$$