

4. Anwendungen

4.1. Spiegelungen

1. Projektionsebene

Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene, welche durch $A(2|5|3)$ und $B(4|1|0)$ geht und zur Ebene $4x - y + 2z - 3 = 0$ senkrecht steht.

2. Lichtstrahl

Ein von $A(20|13|10)$ ausgehender Lichtstrahl geht nach $B(17|10|10)$ und dann weiter, bis er an der Ebene $\varepsilon : x + 2y - 2z + 1 = 0$ reflektiert wird.

- In welchem Punkt R trifft der Lichtstrahl auf die Ebene ε auf?
- In welchem Punkt geht der reflektierte Lichtstrahl durch die xy -Ebene?

3. Spiegelung (Aus einer Prüfung)

Gegeben ist die Ebene $\varepsilon : 2x - y - 2z + 5 = 0$ und die Gerade $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

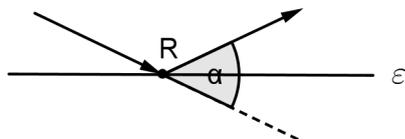
Spiegle die Gerade an der Ebene.

Die Aufgabe gilt als vollständig gelöst, wenn von der gespiegelten Geraden die Koordinaten der Schnittpunkte mit der xy -Ebene sowie mit der yz -Ebene bestimmt sind.

4. Reflexion (Aus einer Prüfung)

Ein von $A(14|5|1)$ ausgehender Lichtstrahl geht durch $B(10|6|1)$ und dann weiter, bis er an der Ebene $\varepsilon : 3x + y - z - 2 = 0$ reflektiert wird.

- Bestimme den Reflexionspunkt R sowie die Gleichung des reflektierten Strahls (Parametergleichung).
- Bestimme den Ablenkwinkel. Das ist der Winkel, um den der Lichtstrahl im Punkt R abgelenkt wird (siehe die Skizze).



5. Reflexionsebene

Ein von $A(2|3|5)$ ausgehender Lichtstrahl wird im Punkt $R(6|7|12)$ an einer Ebene ε reflektiert und geht nachher durch $B(7|9|14)$.

Bestimme die Gleichung der Ebene ε .

6. Zwei Spiegelungen

Ein von $P(0|-2|8)$ ausgehender Lichtstrahl wird zuerst an der Ebene $4x - 3y - z - 24 = 0$, dann an der Ebene $x + 3z - 6 = 0$ reflektiert und geht schliesslich durch $Q(-2|4|6)$.

Bestimme die Koordinaten der beiden Reflexionspunkte.

4.2. Ebene Figuren

1. Quadrat

Von einem Quadrat $ABCD$ kennt man $A(4|1|-3)$, $B(8|3|1)$ und weiss, dass das Quadrat in der Ebene $x + 2y - 2z - 12 = 0$ liegt.

Bestimme die Koordinaten von C und D .

2. Rechteck (Aus einer Prüfung)

Von einem Rechteck $ABCD$ kennt man die Ecke $A(1|-1|2)$ und weiss, dass B und C auf der Geraden $g: (7|5|2) + \lambda(8|7|4)$ liegen.

Weiter weiss man, dass zwei Seiten dieses Rechtecks doppelt so lang sind wie die anderen beiden Seiten.

- Bestimme die Koordinaten von B , C und D (nur *eine* Lösung rechnen).
- Wie viele Lösungen hat die Aufgabe? Begründe, ev. mit Skizzen.

3. Dreieck

Vom Dreieck ABC kennt man $A(1|2|1)$ und $B(3|4|0)$.

C soll auf der Geraden $g: (2|1|3) + \lambda(4|3|7)$ liegen.

Bestimme die Koordinaten von C so, dass das Dreieck Fläche 3 hat.

4. Geo-Dreieck (Aus einer Prüfung)

Gesucht ist ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck (Geo-Dreieck), von dem man eine Ecke $(3|-4|5)$ kennt und weiss, dass die beiden anderen Eckpunkte auf der Geraden $g: (8|4|6) + \lambda(7|6|4)$ liegen.

- Bestimme die Koordinaten der anderen beiden Eckpunkte.
- Wie viele Geo-Dreiecke sind so möglich?

5. Gleichseitiges Dreieck

Von einem gleichseitigen Dreieck kennt man die Ecke $A(0|7|9)$ und weiss, dass die Ecken B und C auf der Geraden $g: (4|5|-13) + \lambda(5|9|-14)$ liegen.

Bestimme die Koordinaten von B und C .

6. Viereck (Aus einer Prüfung)

Gegeben ist das Viereck $ABCD$.

$A(4|2|3)$, $B(2|-1|1)$, $C(-8|-2|-1)$, $D(0|3|3)$.

- Weise nach, dass es sich um ein ebenes Viereck handelt, d.h. dass die vier Punkte in einer Ebene liegen.
- Was für ein Viereck ist es? (Begründe!)
- Berechne die Fläche dieses Vierecks.

4.3. Räumliche Körper

1. Pyramide

Von einer geraden quadratischen Pyramide kennt man die Ecken $A(1|2|4)$, $B(5|8|16)$, $C(17|12|10)$ und weiss, dass die Seitenkanten die Länge $s = 7 \cdot \sqrt{6}$ aufweisen.

Bestimme die Koordinaten von D und der Spitze S .

2. Würfel (Aus einer Prüfung)

Von einem Würfel (Bodenfläche $ABCD$, Deckelfläche $EFGH$) kennt man die Ecke $A(3|1|2)$ und weiss, dass die Würfelkante BC auf der Geraden $g: (11| -3|12)$ $(13| -1|13)$ liegt.

- Bestimme die Koordinaten der Punkte B , C und E .
- Wie viele Lösungen hat die Aufgabe? Begründe in wenigen Sätzen oder mit Skizzen.

3. Quadratische Säule

Die Bodenfläche $ABCD$ eines Quaders ist ein Quadrat. (Die Deckelfläche $EFGH$ natürlich auch.) AE ist eine Kante dieser quadratischen Säule.

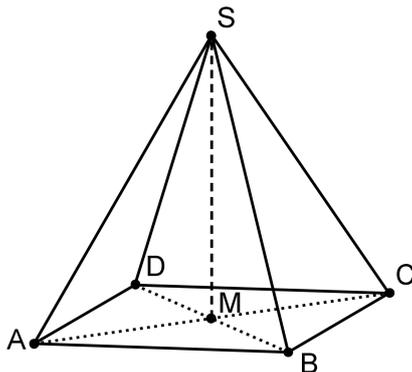
Man kennt die Ebene des Quadrats $ABCD: 2x - 2y + z - 5 = 0$. Weiter weiss man, dass B auf der z -Achse liegt und man kennt $E(10| -4|4)$.

Bestimme die Koordinaten aller Eckpunkte.

4. Pyramide (Aus einer Prüfung)

Von der geraden quadratischen Pyramide (siehe die Skizze) kennt man die Spitze $S(4| -4|10)$, das Zentrum des Bodenquadrats $M(7|2|4)$ und weiss, dass die Ecke A auf der x -Achse liegt.

Bestimme die Koordinaten von A , B , C und D .



5. Würfel (Aus einer Prüfung)

Von einem Würfel (übliche Bezeichnungen) kennt man $A(2|5|3)$.

Das Bodenquadrat $ABCD$ liegt in der Ebene $2x - y - 2z + 7 = 0$, die Seitenfläche $BCGF$ liegt in der Ebene $2x + 2y + z - 35 = 0$.

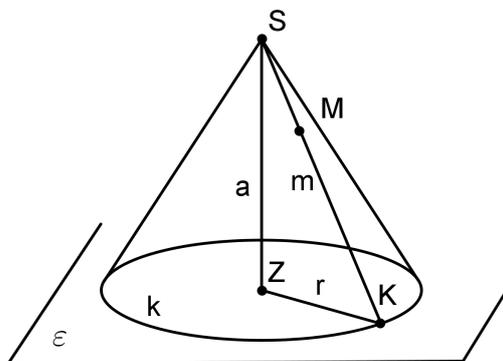
Bestimme die Koordinaten von B, C, E und F .

6. Kegel (Aus einer Prüfung)

Betrachte einen Kegel mit Drehachse a . Man kennt die Spitze S , die Ebene ε des Bodenkreises k sowie einen Punkt M auf der Mantellinie m .

$S(11 | 19 | 18)$, $\varepsilon: x + 3y + 2z - 20 = 0$, $M(10 | 12 | 15)$.

- Bestimme den Winkel zwischen der Mantellinie m und der Ebene ε .
- Bestimme den Radius r des Bodenkreises k .



7. Pyramide (Aus einer Maturprüfung)

Wir betrachten eine gerade quadratische Pyramide. Vom Quadrat $ABCD$ weiss man, dass A und B auf der Geraden g , C und D auf der zu g parallelen Geraden h liegen. Die Spitze S liegt auf der gegebenen Geraden s .

$g: (2 | 1 | 3) \ (0 | 0 | 1)$, h geht durch $(0 | 3 | -5)$ und ist parallel zu g .

$s: (0 | 3 | 1) \ (5 | 2 | 2)$.

Bestimme die Koordinaten aller Eckpunkte der Pyramide.

8. Prisma (kleine Knacknuss)

Gesucht ist ein gerades regelmässiges dreiseitiges Prisma (Toblerone).

Die Bodenfläche ABC ist ein gleichseitiges Dreieck, die Deckelfläche DEF ebenso und die drei Kanten AD , BE und CF stehen senkrecht zu den Dreiecksebenen.

Man kennt die Ecke A und weiss, dass B und C auf der Geraden g liegen.

$A(6 | -2 | 0)$; $g: (6 | 4 | -6) \ (0 | -2 | 6)$ Das Volumen des Prismas beträgt $V = 72$.

Bestimme die Koordinaten aller Eckpunkte.

Diverse weitere Anwendungen

1. Gleiche Abstände

Gegeben sind die Ebenen $x - 2y + 3z - 3 = 0$ und $2x - 4y + 6z + 1 = 0$.

Welche Punkte auf der Geraden $g: (4|1|3) (2|3|6)$ sind von den beiden Ebenen gleich weit entfernt? Bestimme alle Lösungen.

2. Vorgegebener Winkel

Gegeben ist der Punkt $P(5|4|5)$ und die Gerade $a: (4|7|3) (5|6|3)$.

Gesucht ist eine Gerade b durch P , welche a so schneidet, dass der Schnittwinkel von a und b genau 30° beträgt. Bestimme den Schnittpunkt von a und b .

3. Zwei Ebenen und eine Gerade (Aus einer Prüfung)

Gegeben sind die Ebenen $\varepsilon_1: 2x + 2y + z - 5 = 0$ und $\varepsilon_2: x - 8y + 4z - 1 = 0$ sowie die Gerade $g: (1|3|9) (1|2|7)$.

- Eine Kugel soll ihr Zentrum Z auf g haben und beide Ebenen berühren. Bestimme die Koordinaten von Z .
- Überlegungsaufgabe: Die Ebenen bleiben fest. Kann es sein, dass bei anderer Lage von g die Aufgabe keine, eine oder mehrere Lösungen hat? Beschreibe die verschiedenen Möglichkeiten. (Es ist nur die räumliche Idee gefragt. Bei dieser Aufgabe muss man nichts rechnen.)

4. Transversale

Gegeben sind die Geraden a und b sowie der Vektor \vec{v} .

$$a: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; b: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Punkte $A \in a$ und $B \in b$ so, dass die Gerade $t = AB$ zu \vec{v} parallel ist. (Die gesuchte Gerade heisst Transversale von a und b .)