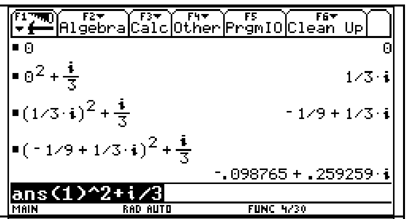
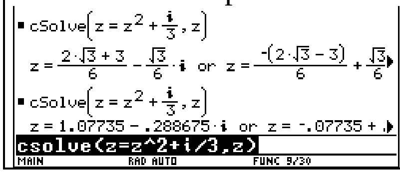
Lösung Matura EF AM (2007)

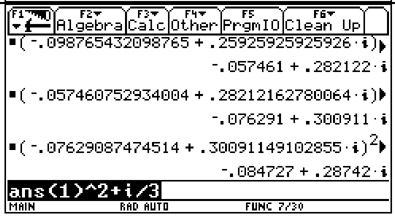
Aufgabe 1a)

Berechne die ersten Folgenglieder
z_1 bis z_4



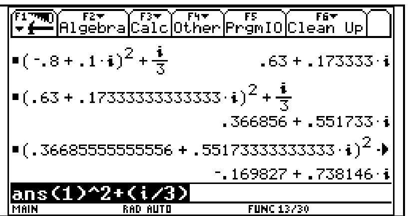
z_5 bis z_7 (siehe rechts).
Grenzwert = Fixpunkt = –0.07735 + 0.288675 i

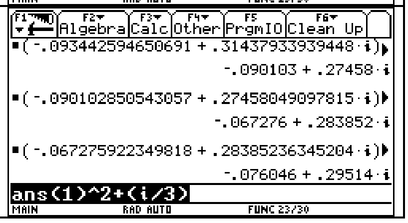




Aufgabe 1b)

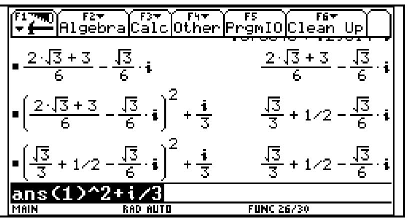
Die Folge strebt gegen den gleichen Grenzwert, aber das merkt man erst etwa ab dem 10. Folgenglied.





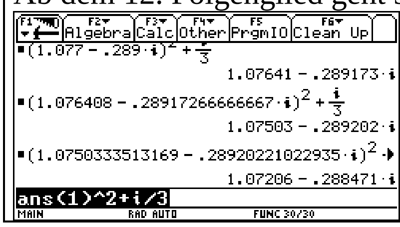
Aufgabe 1c)

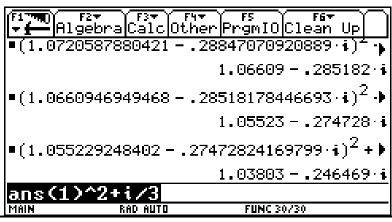
Den Fixpunkt hat man schon in Aufgabe 1a).
Hier ist noch die Kontrolle, dass es sich um einen Fixpunkt handelt.

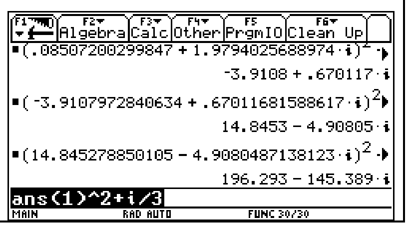


Aufgabe 1d)

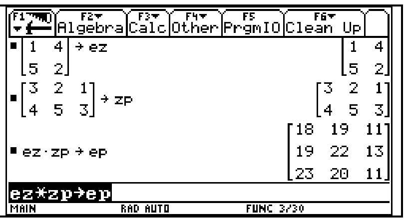
Die Folge bleibt am Anfang nahe beim Fixpunkt. (1.5 Punkte)
Ab dem 12. Folgenglied geht sie rasch ins Unendliche.



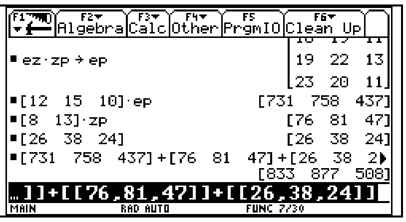




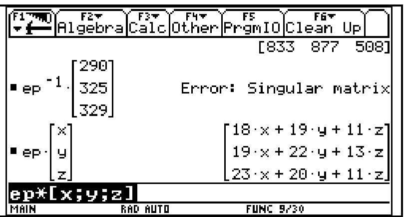
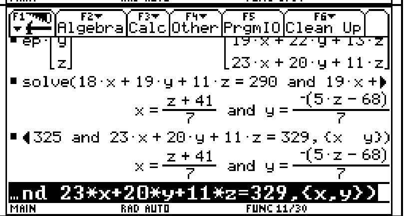
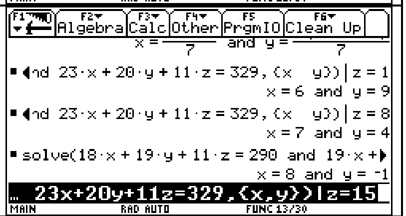
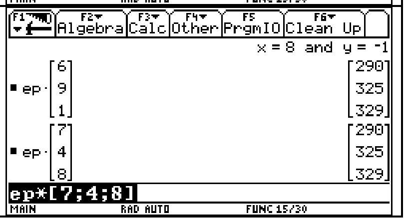
Aufgabe 2a)

Produktionsmatrix	

Aufgabe 2b)

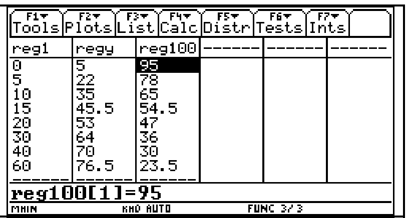
Kostenrechnung mit dem üblichen Verfahren. Alle Kostenvektoren sind liegende Vektoren.	

Aufgabe 2c)

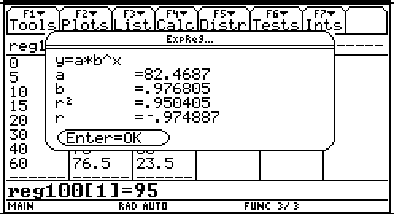
Produktionsmatrix × Produktionsvektor = Verbrauchsvektor Die Lösung über die inverse Matrix geht nicht, weil die Produktionsmatrix singulär ist. (1 Punkt) Also muss man Produktionsmatrix × Produktionsvektor ausschreiben.	
Das entstehende Gleichungssystem löst man (beispielsweise) nach x und y auf. z ist Parameter. Weil die Lösungen ganzzahlig und nichtnegativ sein müssen, kommen für z nur die Werte 1, 8, 15, 22, ... in Frage. (1 Punkt)	
Setze die z-Werte als Bedingung. Für z = 15 wird y negativ. Also gibt es nur die Lösungen [P_1; P_2; P_3] = [6; 9; 1] und [P_1; P_2; P_3] = [7; 4; 8] (2 Punkte)	
Kontrolle.	

Aufgabe 3a)

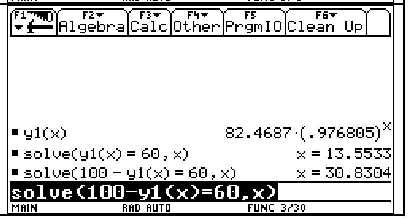
Daten eingeben.
Weil sich die Kurve der 100%-Marke exponentiell nähert, muss man die Differenz zu 100 betrachten.



Führe die Regression durch.
$y = 100 - 82.4687 \cdot 0.976805^x$.
$R^2 = 0.9504$

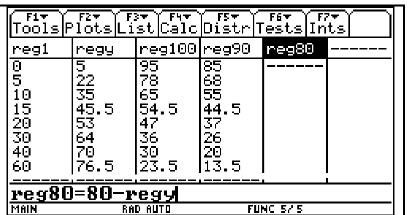


Nach 30.83 Sekunden wird 60% Sättigung erreicht.
(Die Lösung 13.55 Sekunden erhält, wer vergisst, auf 100 zu ergänzen.)
(Wer die Regression mit den gegebenen Daten vollständig durchführt, erhält 3 Punkte)

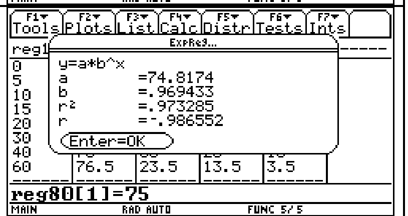


Aufgabe 3b)

Ergänzen auf 90 und 80 Prozent

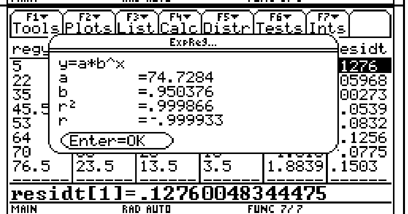


Regression für max. Sättigung von 90 [%]
$y = 90 - 74.8174 \cdot 0.969433^x$.
$R^2 = 0.9733$

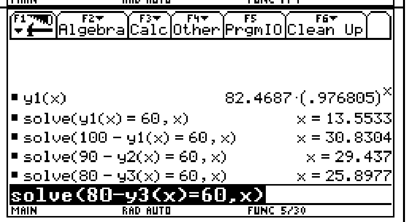


Regression für max. Sättigung von 80 [%]
$y = 80 - 74.7284 \cdot 0.950376^x$.
$R^2 = 0.9999$

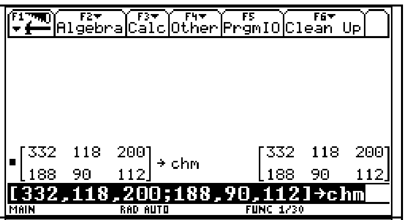
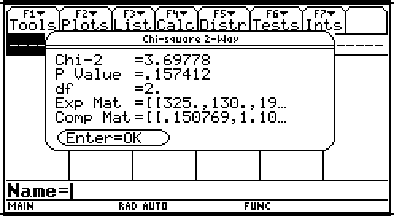
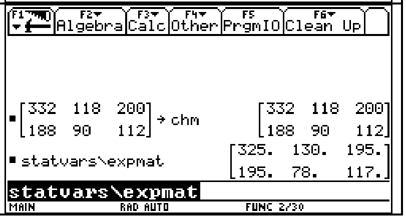
Die letzte Regressionskurve ist die beste.



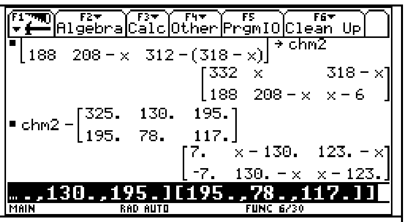
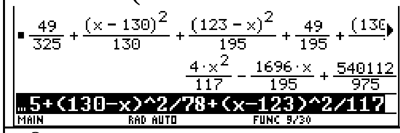
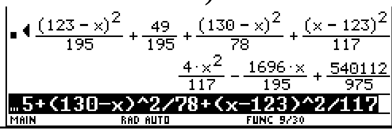
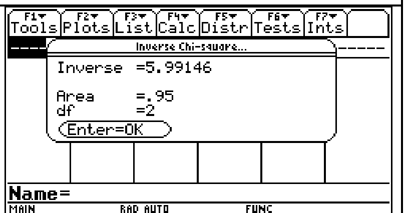
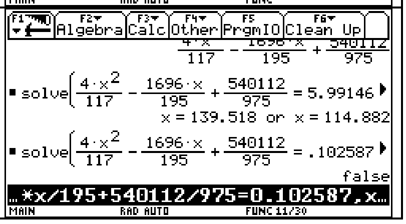
Bei 90% max. Sättigung wird die 60%-Marke nach 29.44 Sekunden erreicht, bei 80% maximaler Sättigung schon nach 25.9 Sekunden.
Das letzte Resultat stimmt auch am besten mit den gegebenen Daten überein. Die 60%-Marke sollte etwa in der Mitte zwischen 20 und 30 Sekunden erreicht sein.



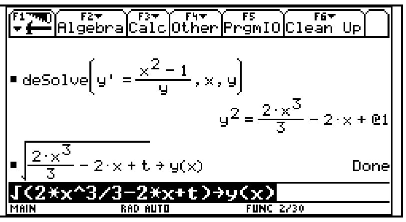
Aufgabe 4a)

Matrix. Die Randhäufigkeiten sind rechts aussen 650 und 390, unten 520, 208, 312. Die Sollwerte sind [325, 130, 195; 195, 78, 117]	
χ^2-Wert 3.698 bei f = 2 Freiheitsgraden. Perzentile 15.74% Somit sind die Daten in Ordnung. (für falsche Anzahl Freiheitsgrade gibt es bei a) 1 Punkt Abzug, aber nicht nochmals bei b)	
Hier ist noch die Soll-Matrix.	

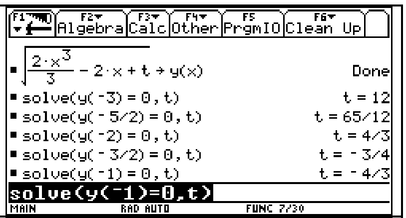
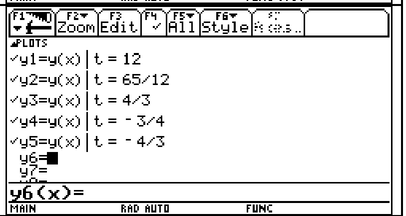
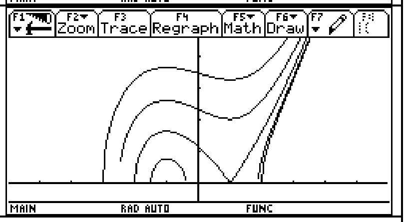
Aufgabe 4b)

Rechne die neue Matrix aus (chm2) und betrachte die Differenzen zu den gleichbleibenden Soll-Werten.	
Den χ^2-Wert muss man von Hand (in Abhängigkeit von x) rechnen. (2. Teil der Zeile im Bildschirm rechts) 	
χ^2-Wert 5.99146 (auch aus der Tabelle) Die 5%-Perzentile führt zu χ^2 = 0.102587.	
Für x ≥ 140 und für x ≤ 114 wird die Abweichung zu gross. Solche Werte sprechen für Abhängigkeit. Also 115 ≤ x ≤ 139 sprechen für Unabhängigkeit. Die zu kleinen χ^2-Werte können gar nicht erreicht werden.	

Aufgabe 5a)

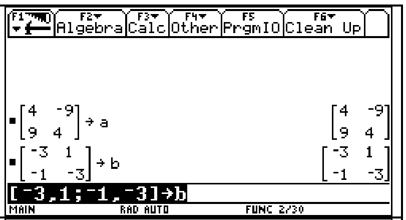
Das Lösen hat "von Hand" zu erfolgen. (Separation der Variabeln)	

Aufgabe 5b)

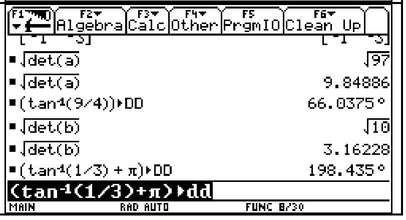
Anfangsbedingungen einsetzen	
Kurven definieren 2 Punkte für korrekte Werte von t.	
Die Grafik sieht dann so aus: (2 Punkte) (Alle Kurven gehen auf die x-Achse herunter und sind auch an der x-Achse zu spiegeln.)	
Eigenschaften: (2 Punkte) Die lokalen Maxima der Kurven liegen bei $x = -1$, die Minima bei $x = 1$. Dort liegen die horizontalen Tangenten, denn dann wird $y' = 0$, weil $x^2 - 1 = 0$ wird. Die Kurven treffen rechtwinklig auf die x-Achse auf. Ausnahme siehe unten. $y_1(x)$ und $y_2(x)$ bestehen aus einem Kurvenbogen. $y_3(x)$ trifft bei $x = 1$ auf die x-Achse, also stimmt die Aussage vom Minimum und nicht mehr und die x-Achse wird nicht rechtwinklig geschnitten. $y_4(x)$ zerfällt in zwei Kurvenbogen. Bei $y_5(x)$ fehlt der linke Kurventeil und es ist nur noch ein Kurvenbogen.	

Aufgabe 6a)

Definiere die Matrizen

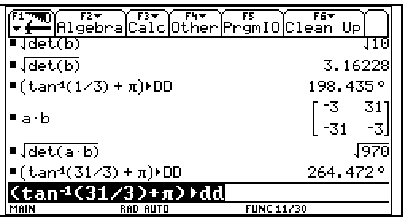


Streckungsfaktoren und Drehwinkel
(ev. mit Skizzen)



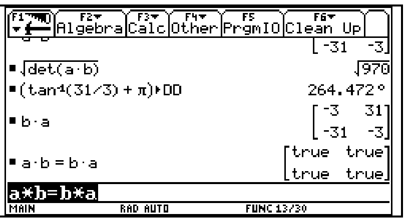
Aufgabe 6b)

Das Produkt ist wieder eine Drehstreckung



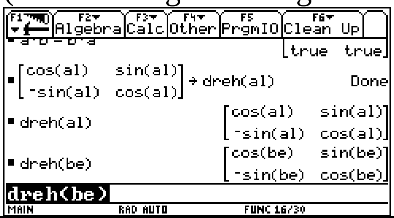
Aufgabe 6c)

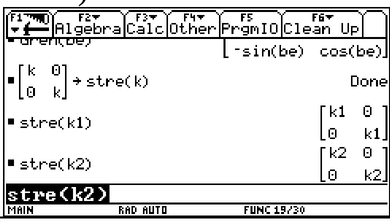
Das Kommutativgesetz gilt.



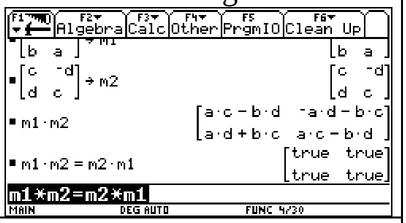
Aufgabe 6d)

Definiere Drehmatrizen und Streckungsmatrizen allgemein
(Dieser Teil geht auch ganz von Hand)





oder man macht einen Ansatz für Drehstreckungsmatrizen.



Drehstreckungen und das Matrixprodukt