Mathematik

Klasse 6C O. Riesen

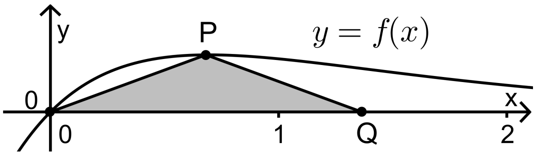
1. **Kurvenbetrachtungen**
   Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}$.

   a) Bestimme die *exakten* Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte (Nullstellen, Extrema inkl. Begründung für Maximum oder Minimum, Wendepunkte).

   b) Bestimme die Gleichung der Wendetangente. Löse mit *exakten* Werten.

   c) Die im I. Quadranten unterhalb der Kurve liegende Fläche rotiert um die x-Achse und bildet so einen Rotationskörper. Berechne dessen Volumen.

   d) (Siehe die Figur) Der Koordinatenursprung, der Kurvenpunkt P und ein weiterer Punkt Q auf der x-Achse legen ein gleichschenkliges Dreieck fest, dessen Basis auf der x-Achse liegt. Bestimme die Koordinaten von P und Q so, dass das Dreieck maximale Fläche erhält und berechne die maximal mögliche Fläche.



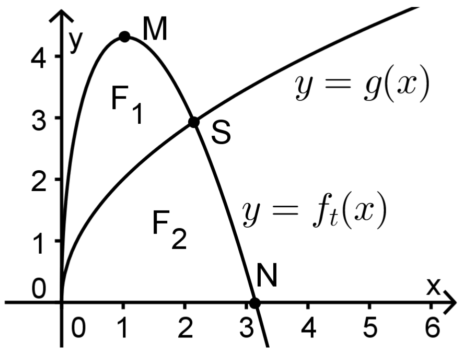
2. **Parameter**

   Gegeben ist die Kurvenschar

   $y = f_t(x) = (t - 2x) \cdot \sqrt{x}$
   (wobei $t > 0$)

   und die Funktion

   $y = g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$



   a) Bestimme, abhängig vom Parameter t, die Koordinaten vom lokalen Maximum M, vom Schnittpunkt S und der Nullstelle N.

   b) Alle Maxima aller Kurven $f_t(x)$ liegen auf einer weiteren Funktionskurve. Bestimme deren Funktionsgleichung $y = k(x)$.

   c) Die beiden Kurven sollen sich im Punkt S rechtwinklig schneiden. Wie gross muss t sein, damit das der Fall ist?

   d) Die im I. Quadranten zwischen der x-Achse und der Kurve von $f_t(x)$ liegende Fläche wird durch die Kurve zu $y = g(x)$ in zwei Teilflächen F_1 und F_2 zerschnitten. Für welchen Wert von t sind diese beiden Teilflächen gleich gross?

3. **Dreieck und Lichtstrahl**

Gegeben ist das Dreieck ABC sowie die Punkte P und Q.
$A(15\,|\,-1\,|\,15)$, $B(9\,|\,11\,|\,6)$, $C(3\,|\,3\,|\,17)$, $P(13\,|\,1\,|\,23)$, $Q(6\,|\,11\,|\,12)$.
Es muss *nicht* nachgewiesen werden, dass die Koordinatengleichung der Ebene des Dreiecks ABC wie folgt lautet: $\varepsilon : x + 2y + 2z - 43 = 0$.

a) Betrachte zunächst das Dreieck ABC:
Berechne den Winkel α und die Fläche des Dreiecks.

b) Bestimme den Abstand von P zur Ebene ε.

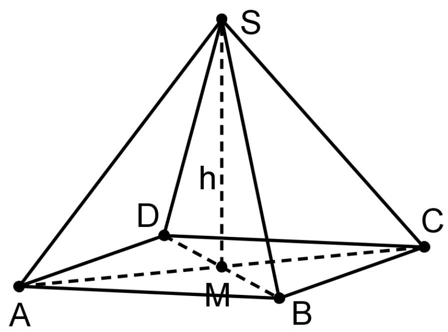
c) Ein von P ausgehender Lichtstrahl wird im Punkt R an der Ebene ε reflektiert und geht nachher durch den Punkt Q.
Bestimme die Koordinaten von R.

d) Zeige, dass R im Innern des Dreiecks ABC liegt.
Wer R nicht bestimmen konnte, darf diese Teilaufgabe mit dem Ersatzwert $R(5\,|\,4\,|\,15)$ rechnen.
Hinweis: Schneide die Geraden AB und CR und weise nach, dass einerseits der Schnittpunkt S zwischen A und B, andrerseits R zwischen C und S liegt.

4. **Pyramide und Kugel**

Betrachte die skizzierte gerade quadratische Pyramide.
Gegeben sind die Punkte $A(0\,|\,11\,|\,7)$, $B(10\,|\,21\,|\,2)$ und $C(20\,|\,10\,|\,0)$.
Die Pyramide hat Höhe $h = 30$.

Ausserdem ist die Kugel k gegeben.
$k : x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 8y + 6z - 59 = 0$



a) Weise nach, dass die gegebenen Punkte A, B, C Eckpunkte eines Quadrates sind.

b) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene $ABCD$ sowie die Koordinaten der Punkte D und S.

c) Bestimme Mittelpunkt und Radius der Kugel k.

d) Berührt, schneidet oder meidet die Kugel k die Ebene $ABCD$?
(Begründe durch Berechnungen. Ein allfälliger kürzester Abstand zwischen Kugel und Ebene oder die Koordinaten des Berührpunktes sind *nicht* verlangt.)

5. **Bauteile**

Eine Firma verkauft Bauteile. Man nimmt an, dass 4% der Bauteile nicht funktionstüchtig sind und somit als Ausschuss gelten. (D.h. für ein zufällig gewähltes Bauteil besteht eine Wahrscheinlichkeit von 4%, dass es defekt ist und sich somit um ein Ausschuss-Stück handelt.)

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufälligen Stichprobe von 20 Bauteilen höchstens zwei Ausschuss-Stück enthalten sind?

b) Ein Supermarkt bestellt 4000 Bauteile. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man darunter mindestens 3850 funktionstüchtige Bauteile?

c) Die Firma selber prüft ihre Bauteile vor dem Versand. 98% der funktionstüchtigen, aber auch 5% der defekten Bauteile bestehen den Prüftest.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bauteil defekt ist, obschon es den Prüftest bestanden hat?

d) Ein Kunde zweifelt den Ausschuss-Anteil von 4% an, weil er in einer Sendung von 75 Bauteilen 7 Ausschuss-Stück findet.
Werte diese Beobachtung in einem ausführlich formulierten Hypothesentest aus. ($\alpha = 5\%$)

6. **Ein Spiel**

In einem Behälter befinden sich 12 Kugeln, nämlich 5 weisse, 5 rote und zwei gelbe. Zwei Spieler, A und B, spielen nach folgenden Regeln: Spieler A beginnt, dann wird abwechslungsweise gespielt. Wer an der Reihe ist, zieht drei Kugeln mit einem Griff. Wenn bei diesem Zug alle drei Farben gezogen wurden, dann ist das Spiel gewonnen. Andernfalls werden die Kugeln zurückgelegt und der andere Spieler ist an der Reihe.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit p, dass der Spieler A in seinem ersten Zug alle drei Farben zieht (und somit das Spiel gewinnt).
Wer diesen Teil nicht lösen kann, darf mit dem Wert $p = \dfrac{5}{21}$ *weiter arbeiten.*

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler A in *seinem zweiten* Zug gewinnt. Zeichne ein passendes Baumdiagramm.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler A das Spiel, welches theoretisch unendlich lange dauern kann, gewinnt.

d) Jetzt betrachten wir noch die Anzahl Züge, die bei diesem Spiel durchgeführt werden. Bezeichne diese Zufallsgrösse mit X.
Hinweis: Ein Teil der (unendlich langen) Verteilungstabelle könnte nützlich sein.

d_1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet das Spiel nach genau 4 Zügen? (Das heisst, dass der Spieler B in seinem zweiten Zug gewonnen hat)

d_2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet das Spiel nach genau n Zügen?

d_3) Berechne $E(X)$. Das ist dann die durchschnittliche Anzahl an Zügen, welche das Spiel dauert.