Mathematik

Klasse 6H O. Riesen

1. Kurvenbetrachtungen

Für jeden Wert von $t > 0$ ist eine Kurve $y = f_t(x) = \dfrac{t^2}{x^2 + t}$ gegeben.

a) Setze $t = 3$ und führe eine Kurvendiskussion durch.
Verlangt werden: Definitionsbereich, Asymptoten, die Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte (Nullstellen, Extremalstellen inkl. Begründung, ob es ein Maximum oder Minimum ist, Wendepunkte).

b) Setze $t = 4$. Betrachte die zwischen der Kurve und der x-Achse liegende, beidseits ins Unendliche reichende Fläche F. Dieser Fläche wird ein Rechteck einbeschrieben, von dem eine Seite auf der x-Achse liegt. Welchen prozentualen Anteil der Fläche F kann man mit dem Rechteck maximal überdecken?

c) Bestimme, abhängig von t, die Koordinaten des Wendepunkts (wähle die Lösung mit positiver x-Koordinate) sowie die Gleichung der Kurven*normalen* in diesem Wendepunkt. Für welchen Wert von t geht diese Kurvennormale durch den Koordinatenursprung?

2. Eine Parabel

Für $t > 0$ ist durch $y = f_t(x) = -\dfrac{6}{t^3} \cdot x^2 + \dfrac{6}{t}$ eine Parabel gegeben.
Wir betrachten die von der Parabel und der x-Achse umschlossene Fläche F.
(Eine Skizze für beispielsweise $t = 2$ ist empfehlenswert.)

a) Für welchen Wert von t schneidet die Kurve $f_t(x)$ die x-Achse im Winkel $\alpha = 45°$?
Anders gefragt: Für welchen Wert von t hat die Fläche F links und rechts aussen einen spitzen Winkel von $45°$?

b) Weise nach, dass die Fläche F konstant ist. (Zeige, dass F immer denselben Wert annimmt, unabhängig von t.)
Löse für diese Teilaufgabe das vorkommende Integral vollständig, von Hand gerechnet (d.h. ohne Verwenden des Taschenrechners).

c) Die Fläche F rotiert um die x-Achse. Wie gross muss t sein, damit das Volumen des entstehenden Rotationskörpers 3π beträgt?

d) Die Fläche F wird durch die Parabel $y = x^2$ in drei Teilflächen zerschnitten. Für welchen Wert von t sind diese drei Flächen gleich gross?

3. **Parallelogramme (Vektorgeometrie)**

Von einem Parallelogramm $ABCD$ kennt man die Eckpunkte $A(\,5\,|\,2\,|\,7\,)$, $B(\,2\,|\,8\,|\,1\,)$ und $C(\,6\,|\,t\,|\,6-t\,)$.

a) Setze $t = 9$ und berechne:

  a_1) die Koordinaten von C und D

  a_2) die Koordinatengleichung der Ebene ε, in welcher das Parallelogramm liegt.

  a_3) die Innenwinkel α und β (in den Eckpunkten A und B). Welcher von den beiden ist der spitze Winkel?

b) Das Parallelogramm $ABCD$ soll ein Rhombus sein. Berechne für diesen Fall die Koordinaten von C sowie die Werte von t.

c) $ABCD$ soll ein Rechteck sein. Wo liegt C und wie gross ist t?

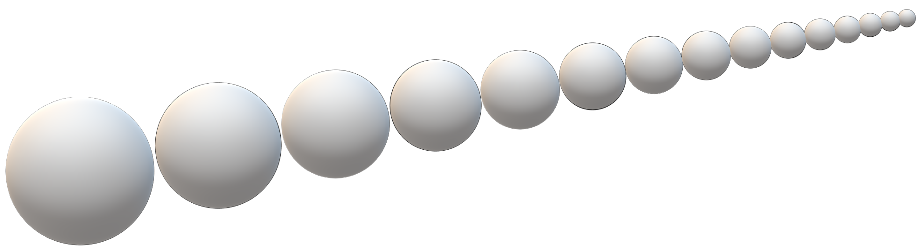
d) Das Parallelogramm soll eine Fläche von $F = 27$ haben. Wo liegt in diesem Fall C und wie gross ist t?

4. **Kugeln (Thema mit Variationen aus verschiedenen Gebieten)**

a) Bestimme den kürzesten Abstand zwischen der Kugel k und der Ebene ε.
k: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y - 2z + 22 = 0$, ε: $x - 2y - 2z + 10 = 0$.
(Hinweise: Es ist nur der *Abstand* gesucht.
Mittelpunkt und Radius der Kugel sind ziemlich nützlich.)

b) Die Kugel mit Zentrum $M(\,5\,|\,2\,|\,7\,)$ und Radius $r = 9$ schneidet die Ebene $\varepsilon : 2x + y - 2z + 2 = 0$ in einem Kreis. Es gibt zwei Kugeln mit Radius 15, die diese Ebene in *demselben* Kreis schneiden.
Bestimme das Zentrum *einer* solchen Kugel.

c) Ein Künstler stellt 15 Kugeln in einer Reihe auf (siehe die Skizze).
Die Radien der Kugeln bilden eine Geometrische Folge.
Man kennt die Radien $r_1 = 25\,\text{cm}$ und $r_2 = 24\,\text{cm}$ der beiden grössten Kugeln.
Berechne den Radius der kleinsten Kugel sowie das Gesamtvolumen aller 15 Kugeln.



5. **Glücksrad**

Ein Glücksrad zeigt $GEWINN$, $NEUTRAL$ oder $VERLUST$.
Man kennt die Wahrscheinlichkeiten $p(GEWINN) = \dfrac{1}{25}$ und $p(VERLUST) = \dfrac{1}{5}$.

a) Das Glücksrad wird 50 Mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man weniger als 35 Mal $NEUTRAL$ erhalten?

b) Das Glücksrad wird 2400 Mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man mindestens 100 $GEWINN$ erhalten?

c) Der Spieler hat den Verdacht, dass $VERLUST$ zu oft vorkommt und will diesen Verdacht mit Signifikanzniveau $\alpha = 5\,\%$ überprüfen. Der Spieler stellt fest, dass in 400 Drehungen des Glücksrades 95 Mal $VERLUST$ erschienen ist. Ist sein Verdacht berechtigt? (Formuliere einen ausführlichen Hypothesentest.)

d) Der Veranstalter möchte nicht allzu viele $GEWINN$ auszahlen müssen. Wie oft kann das Glücksrad gedreht werden, damit mit 95 %-iger Sicherheit höchstens 30 Mal $GEWINN$ vorgekommen ist?

6. **Wer wagt, gewinnt**

An einem Jahrmarkt wird ein Glücksspiel *WERWAGTGEWINNT* angeboten.

a) Mit den Buchstaben von WERWAGTGEWINNT kann man viele Buchstabensequenzen hinschreiben, beispielsweise WETTEGINGWARNW.
Wie viele verschiedene solche Buchstabensequenzen sind theoretisch möglich?

b) Das Glücksspiel geht nach folgenden Regeln: In einem Behälter hat man 4 grüne und 4 rote Kugeln. Man zieht Kugeln einzeln und ohne Zurücklegen.
Man leistet zuerst einen Einsatz von 5 Dukaten und darf dafür eine Kugel ziehen.
Nun darf der Spieler weitere Kugeln (immer einzeln und ohne Zurücklegen) ziehen.
Für jede weitere Kugel, die dieselbe Farbe hat wie die erste gezogene, erhält der Spieler 5 Dukaten ausbezahlt. Sobald er aber einmal die andere Farbe gezogen hat, erhält er keine Dukaten mehr und das Spiel ist sofort zu Ende.

b_1) Zeichne ein Baumdiagramm zu diesem Spiel.

b_2) Die Zufallsgrösse X bezeichne den Spielgewinn (des Spielers). Stelle die Verteilungstabelle auf und berechne $E(X)$ und $V(X)$.

b_3) Lohnt sich das Spiel für den Spieler oder für den Veranstalter?

c) Nach einiger Zeit findet der Veranstalter sein Spiel etwas langweilig und will es für die Spieler lukrativer gestalten. (Man zieht die Kugeln immer noch einzeln ohne Zurücklegen und so lange, bis man die andere Farbe erwischt hat.)
Der Veranstalter zahlt für die zweite Kugel (sofern sie die gleiche Farbe hat, wie die erste) neu $2 \cdot 5 = 10$ Dukaten, für die dritte gleichfarbige Kugel $3 \cdot 5 = 15$ Dukaten dazu und für die vierte gleichfarbige Kugel $4 \cdot 5 = 20$ Dukaten dazu. Wie viel muss er für die erste Kugel als Einsatz verlangen, damit das Spiel fair ist?