

# Mathematik

Klasse 6L

O. Riesen

## 1. Kurvenbetrachtungen

Für jeden Wert von  $t \neq 0$  ist eine Kurve  $y = f_t(x) = \frac{t \cdot x^3 - 4x^2 - 3x + 2}{x^2}$  gegeben.

- a) Setze  $t = 1$  und führe eine Kurvendiskussion durch.  
Verlangt werden: Definitionsbereich, Asymptoten und die Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte (Nullstellen, Extremalstellen inkl. Begründung, ob es ein Maximum oder Minimum ist, Wendepunkte).
- b) Setze  $t = 3$ . Vom Punkt  $P(0 | \frac{1}{2})$  aus kann man zwei Kurventangenten legen.  
Bestimme die Gleichung *einer* solchen Tangente inkl. Berührungspunkt.
- c) Für welchen Wert von  $t$  hat die schräge Asymptote einen Steigungswinkel von  $\alpha = +30^\circ$ ?
- d) Bestimme die Gleichung der Wendetangente, abhängig von  $t$  und beweise dann die Behauptung, dass sich alle Wendetangenten aller dieser Kurven in einem Punkt schneiden.

## 2. Flächenberechnungen

Gegeben ist die Funktion  $y = f_a(x) = x^2 \cdot \frac{a-x}{a-1}$  mit dem Parameter  $a > 1$ .

- a) Setze  $a = 3$  und betrachte den Inhalt des endlichen Flächenstücks  $F$ , welches der Graph der Funktion  $f_3(x)$  und die  $x$ -Achse einschliessen.
  - a<sub>1</sub>) Berechne diese Fläche  $F$ .  
Löse das vorkommende Integral *von Hand*, d.h. notiere den vollständigen Lösungsweg *ohne Verwenden des CAS-Taschenrechners*.
  - a<sub>2</sub>) Der Graph der Funktion  $f_2(x)$  zerteilt diese Fläche  $F$  in zwei Teilflächen.  
Berechne das Verhältnis der beiden Teilflächen in möglichst kleinen natürlichen Zahlen.
- b) Löse diese Teilaufgabe mit *exakten* Werten:  
Das endliche Flächenstück zwischen dem Graphen von  $f_2(x)$  und dem Graphen von  $f_{\frac{5}{4}}(x)$  rotiert um die  $x$ -Achse.  
Wie gross wird das Volumen des so beschriebenen Rotationskörpers?
- c) Der Graph der Funktion  $f_a(x)$  und die  $x$ -Achse schliessen ein endliches Flächenstück ein.  
Für welchen Wert von  $a$  wird der Inhalt dieses Flächenstücks minimal?  
Berechne auch die minimal mögliche Fläche.

### 3. Vektorgeometrie

Gegeben sind die Gerade  $g : (5 \mid -9 \mid 3) \ (7 \mid -11 \mid 4)$ , die Ebene  $\varepsilon : 2x + y + 3z + 15 = 0$  und die Kugel  $k : x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 14y - 20z - 51 = 0$ .

- Berechne den Schnittpunkt und den spitzen Schnittwinkel zwischen  $g$  und  $\varepsilon$ .
- Berechne Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$  der Kugel  $k$ .

Wer Teil b) nicht schafft, darf mit den Ersatzwerten  $M(-4 \mid 8 \mid 9)$  und  $r = 15$  weiter arbeiten.

- Die Kugel  $k$  schneidet die Ebene  $\varepsilon$  in einem Kreis. Bestimme Mittelpunkt und Radius dieses Schnittkreises.
- Bestimme die Koordinatengleichungen der Ebenen, welche  $k$  berühren und zu  $g$  senkrecht stehen (*alle Lösungen!*).

### 4. Pyramide

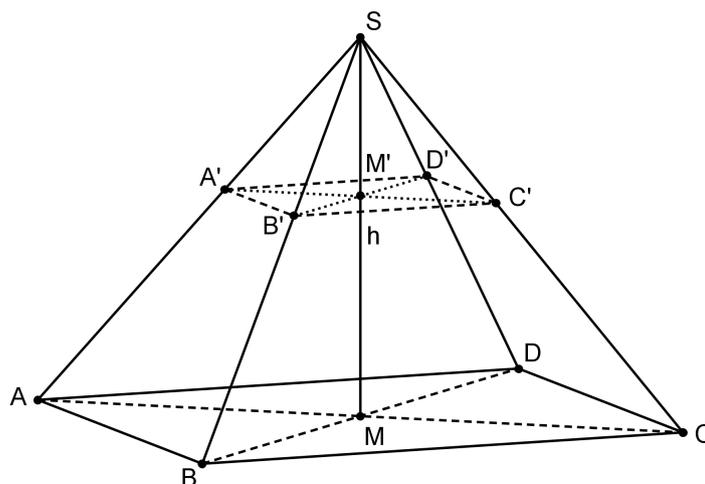
Die Grundfläche  $ABCD$  der dargestellten Pyramide ist ein Parallelogramm mit Diagonalschnittpunkt  $M$ . Die Höhe  $h$  trifft im Punkt  $M$  rechtwinklig auf die Ebene der Grundfläche.

Man kennt  $A(-1 \mid 2 \mid 3)$ ,  $B(5 \mid 3 \mid 5)$  und  $M(3 \mid 5 \mid 4)$  sowie die Länge  $h = \overline{MS} = 45$ .

- Bestimme die Koordinaten von  $C$ ,  $D$  und  $S$ . (Eine Lösung genügt)
- Berechne das Volumen dieser Pyramide.
- Die Pyramide wird nun durch eine Ebene  $\varepsilon$  in zwei Teile geschnitten, so dass oben eine kleine Pyramide weggeschnitten wird (siehe die *nicht massstäbliche* Figur).  $\varepsilon$  soll zur Ebene der Grundfläche  $ABCD$  parallel sein.

Weiter soll das Volumen der kleinen Pyramide  $P_{SA'B'C'D'}$  genau  $\frac{1}{64}$  vom Volumen der grossen Pyramide  $P_{SABCD}$  betragen.

Bestimme die Koordinaten von  $M'$  und die Koordinatengleichung von  $\varepsilon$ .



## 5. Tulpen

Es gibt Tulpen in den Farben rot, gelb, grün und weiss.  
Tulpen gleicher Farbe sind *ununterscheidbar*.

- a) Ein Gärtner pflanzt in einem Kistchen in einer Reihe 10 grüne, 8 rote, 4 weisse und 2 gelbe Tulpen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er, das Kistchen zu bepflanzen?
- b) In einem Jutesack werden 100 Zwiebeln für grüne und 150 für weisse Tulpen geliefert. Man zieht 40 Zwiebeln zufällig und mit einem Griff. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man mehr Zwiebeln für grüne als für weisse Tulpen?
- c) Ein Händler verkauft Zwiebeln für rote und gelbe Tulpen. Eine rote Tulpe blüht mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%, eine gelbe Tulpe blüht mit einer Wahrscheinlichkeit von 85%. Die Gärtnerei kauft Zwiebeln beider Sorten, wobei 65% der Zwiebeln solche für rote Tulpen sind.  
Die Tulpenzwiebeln werden zusammengeschüttet und gemischt.
  - c<sub>1</sub>) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass aus einer zufällig gewählten und gepflanzten Zwiebel eine rote Tulpe blüht.
  - c<sub>2</sub>) Aus einer zufällig gewählten und gepflanzten Zwiebel blüht eine Tulpe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es eine gelbe Tulpe geworden?
  - c<sub>3</sub>) Die Gärtnerei pflanzt 200 rote und 250 gelbe Tulpenzwiebeln. Wenn die Tulpen erblühen, dann können sie auf dem Markt verkauft werden, nämlich zu 2.20 Gulden pro rote und 2.40 Gulden pro gelbe Tulpe. Mit welchem durchschnittlichen Erlös darf die Gärtnerei rechnen?

## 6. Vereinsausflug

Ein Jugendverein macht seinen Jahresausflug in einen Freizeitpark.  
Für jedes Vereinsmitglied betrage die Wahrscheinlichkeit, sich für den Ausflug anzumelden, 80%.

- a) Der Verein habe 45 Mitglieder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben sich mindestens 40 Leute angemeldet?
- b) Zwei Jahre später hat der Verein 63 Mitglieder. Welche Anzahl an Anmeldungen ist am wahrscheinlichsten?
- c) In den organisierten Reisebussen für den Ausflug hat es 240 Plätze. Weil die Mitgliederzahl immer grösser wird, fragt sich die Vereinsleitung, wie viele Mitglieder der Verein haben darf, damit die 240 Plätze mit mindestens 98.5%-iger Sicherheit ausreichend sind. Wie viele Mitglieder darf der Verein (so gesehen) haben?
- d) Viel später hat der Verein 560 Mitglieder. Die Vereinsleitung vermutet, dass die Anmelde-Wahrscheinlichkeit von 80% nicht mehr stimmt und grösser geworden ist. Welche Anzahl von Anmeldungen bestätigen die Annahme, dass diese Wahrscheinlichkeit grösser geworden ist?  
(Formuliere einen Hypothesentest,  $\alpha = 5\%$ )