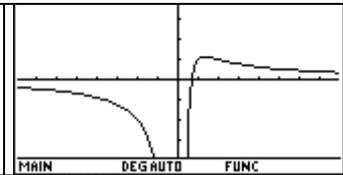


Lösung Matura 6H (2012)

Aufgabe 1a)

<p>$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Nullstelle $N\left(\frac{2}{3} \mid 0\right)$, Polstelle und vertikale Asymptote $x = 0$, horizontale Asymptote $y = 0$</p>		<pre> NewProb Done Define y1(x) = (3*x - 2)/x^2 Done zeros(y1(x), x) (2/3) Zeros(y1(x), x) </pre>
<p>Maximum $M\left(\frac{4}{3} \mid \frac{9}{8}\right)$ Wendepunkt $W(2 \mid 1)$</p>	<pre> d/dx(y1(x)) x^3 zeros(-(3*x - 4)/x^3, x) (4/3) y1(4/3) (9/8) y1(4/3) (9/8) </pre>	<pre> d^2/dx^2(y1(x)) 6*(x-2)/x^4 zeros(6*(x-2)/x^4, x) (2) y1(2) (1) y1(2) </pre>

Aufgabe 1b)

<p>Steigung im Wendepunkt $m = -1/4$ Also sucht man den Kurvenpunkt mit Steigung 4. $P(0.7564 \mid 0.4704)$</p>	<pre> y1(2) (1) d/dx(y1(x)) x=2 -1/4 d/dx(y1(x)) -(3*x-4)/x^3 Solve(d(y1(x), x)=4, x) </pre>	<pre> solve(d/dx(y1(x)) = 4, x) x = .756373 y1(x) x = .75637266330915 .470404 y1(x) x = .75637266330915 </pre>
---	--	--

Aufgabe 1c)

<p>Ansatz $y = m \cdot x + 4/3$, wobei m die Steigung im Punkt $(x \mid y)$ ist. Das ergibt die Kurvenpunkte $\left(3 \mid \frac{7}{9}\right)$ und $\left(\frac{3}{2} \mid \frac{10}{9}\right)$</p>	<pre> d/dx(y1(x)) -(3*x-4)/x^3 solve(y1(x) = -(3*x-4)/x^3 * x) x = 3 or x = 3/2 ...x) = -(3*x-4)/x^3 * x + 4/3, x) </pre>	<pre> solve(y1(x) = -(3*x-4)/x^3 * x) x = 3 or x = 3/2 y1(3) 7/9 y1(3/2) 10/9 y1(3/2) </pre>
--	---	--

Aufgabe 1d)

<p>Variante 1: (anschaulich) Die Wendetangente liefert den höchsten y-Achsenabschnitt $v = 3/2$.</p>	<pre> x = 3 or x = 3/2 y1(3) 7/9 y1(3/2) 10/9 solve(y1(2) = -1/4 * 2 + v, v) v = 3/2 Solve(y1(2) = -1/4 * 2 + v, v) </pre>	
<p>Variante 2: (rechnerisch) Lege im Kurvenpunkt $P(a \mid f(a))$ die Tangente. Das ergibt v in Abhängigkeit von a. Suche das maximale v, d.h. $v' = 0$. Somit ist das grösstmögliche v $v = 3/2$. Man kann keine Tangente vom Punkt $(0 \mid y)$ an die Kurve legen, wenn $y > 3/2$.</p>	<pre> d/dx(y1(x)) x=a a^3 -(3*a-4)/a^3 d/dx(y1(x), x) x=a solve(d/dx(6*(a-1)/a^2) = 0, a) a = 2 v = 6*(a-1)/a^2 a=2 v = 3/2 v = 6*(a-1)/a^2 a=2 </pre>	<pre> solve(y1(a) = -(3*a-4)/a^3 * a) v = 6*(a-1)/a^2 v1(a) = -(3*a-4)/a^3 * a + v, v) </pre>

Aufgabe 2a)

<p>Die Funktion definieren. Die Nullstelle ist die untere Grenze fürs Integral, die obere ist ∞.</p> $V = \pi \cdot \int_{t/3}^{\infty} \left(\frac{3x-t}{x^2} \right)^2 dx = 3 \text{ ergibt } t = 3\pi.$	<ul style="list-style-type: none"> Define $y1(x) = \frac{3 \cdot x - t}{x^2}$ zeros(y1(x), x) $\left\{ \frac{t}{3} \right\}$ <p>Zeros(y1(x), x)</p>	<ul style="list-style-type: none"> $\pi \cdot \int_{t/3}^{\infty} ((y1(x))^2) dx = \frac{9 \cdot \pi}{t}$ solve($\frac{9 \cdot \pi}{t} = 3, t$) $t = 3 \cdot \pi$ <p>Solve(9*pi/t=3,t)</p>
---	---	---

Aufgabe 2b)

<p>$y'(t/3) = \tan(60^\circ)$ nach t auflösen. $t = 3^{3/4} = 3.948.$</p>	<ul style="list-style-type: none"> $\frac{d}{dx}(y1(x)) x = \frac{t}{3} = \frac{27}{t^2}$ solve($\frac{27}{t^2} = \tan(60^\circ), t$) $t = 3 \cdot 3^{1/4}$ or $t = -3 \cdot 3^{1/4}$ <p>Solve(27/t^2=tan(60),t)</p>	<ul style="list-style-type: none"> solve($t^2 = \tan(60^\circ), t$) $t = 3 \cdot 3^{1/4}$ or $t = -3 \cdot 3^{1/4}$ solve($\frac{27}{t^2} = \tan(60^\circ), t$) $t = 3.948222$ or $t = -3.948$ <p>Solve(27/t^2=tan(60),t)</p>
---	---	---

Aufgabe 2c)

<p>Wendepunkt W (t 2/t), mit Steigung m = f'(t) = -1/t²</p>	<ul style="list-style-type: none"> $\frac{d^2}{dx^2}(y1(x)) = \frac{6 \cdot (x-t)}{x^4}$ solve($\frac{6 \cdot (x-t)}{x^4} = 0, x$) $x = t$ <p>Solve(6*(x-t)/x^4=0,x)</p>	<ul style="list-style-type: none"> $y1(x) x = t = \frac{2}{t}$ $\frac{d}{dx}(y1(x)) x = t = \frac{-1}{t^2}$ <p>d(y1(x),x) x=t</p>
<p>v ausrechnen. Wendetangente definieren. $w(x) = -\frac{1}{t^2}x + \frac{3}{t}$</p>	<ul style="list-style-type: none"> $\frac{d}{dx}(y1(x)) x = t = \frac{-1}{t^2}$ solve($\frac{2}{t} = \frac{-1}{t^2} \cdot t + v, v$) $v = \frac{3}{t}$ <p>Solve(2/t=-1/t^2*t+v,v)</p>	<ul style="list-style-type: none"> Define $y2(x) = \frac{-1}{t^2} \cdot x + \frac{3}{t}$ <p>Define y2(x)=-1/t^2*x+3/t</p>

Aufgabe 2d)

<p>Die Nullstelle der Funktion N(t/3 0) hat man von Aufgabe 2a), die x-Koordinate vom Wendepunkt von 2c) Nullstelle der Wendetangente N(3t 0)</p>	<ul style="list-style-type: none"> Define $y2(x) = \frac{-1}{t^2} \cdot x + \frac{3}{t}$ solve(y2(x) = 0, x) $x = 3 \cdot t$ <p>Solve(y2(x)=0,x)</p>	
<p>$\int_{t/3}^t f(x) dx + \int_t^{3t} w(x) dx = 3 \ln(3)$ ist konstant. QED.</p>	<ul style="list-style-type: none"> $\int_{t/3}^t y1(x) dx = 3 \cdot \ln(3) - 2$ $\int_t^{3 \cdot t} y2(x) dx = 2$ <p>f(y2(x),x,t,3*t)</p>	<ul style="list-style-type: none"> $\int_{t/3}^t y2(x) dx = 2$ $\int_{t/3}^t y1(x) dx + \int_t^{3 \cdot t} y2(x) dx = 3 \cdot \ln(3)$ <p>f(y2(x),x,t,3*t)</p>

Aufgabe 3a)

Definiere A und g. Schneide g mit der Ebene ϵ_1 . $S(8 \mid -6 \mid 9)$	<pre> NewProb Done [7 5 7] → a [7 5 7] [20 -9 0] - [16 -8 3] → b [4 -1 -3] [16 -8 3] + t·rg → g [4·t+16 -t-8 3-3·t] [16, -8, 3] + t·rg → g [16, -8, 3] + t·rg → g MAIN DEGRAUTO FUNC 4/30 </pre>	<pre> [16 -8 3] + t·rg → g [4·t+16 -t-8 3-3·t] solve(2·(4·t+16) + 2·(-t-8) = -2) t = -2 g t = -2 [8 -6 9] g t = -2 MAIN DEGRAUTO FUNC 6/30 </pre>
Winkel zwischen dem Normalenvektor n der Ebene und dem Richtungsvektor von g, auf 90° ergänzen. 11.31°	<pre> [2 2 1] → n [2 2 1] dotP(rg, n) √26 norm(rg)·norm(n) 26 cos⁻¹(√26/26) 78.690068 cos⁻¹(√26/26) 78.690068 cos⁻¹(√26/26) MAIN DEGRAUTO FUNC 9/30 </pre>	<pre> cos⁻¹(√26/26) 78.690068 √26/26 .196116 90 - 78.69006752598 11.309932 90 - 78.69006752598 MAIN DEGRAUTO FUNC 11/30 </pre>

Aufgabe 3b)

n und rg sind Richtungen in der gesuchten Ebene ϵ_2 . S oder einen Punkt von g einsetzen. Ebene $\epsilon_2 : x - 2y + 2z - 38 = 0$.	<pre> 11.309932 crossP(rg, n) [5 -10 10] [5 -10 10] [1 -2 2] 5 dotP([1 -2 2], [8 -6 9]) 38 P([1, -2, 2], [8, -6, 9]) MAIN DEGRAUTO FUNC 14/30 </pre>	
Ersatzwerte:	Die Ebene liegt auf der anderen Seite von A (an ABFE gespiegelt)	

Aufgabe 3c)

$B(3 \mid 1 \mid 5)$ ist Lotfußpunkt von A auf ϵ_1 $C(6 \mid -5 \mid 11)$ Lotfußpunkt von B auf ϵ_2	<pre> a + t·n [2·t+7 2·t+5 t+7] solve(2·(2·t+7) + 2·(2·t+5) = -2) t = -2 a + t·n t = -2 [3 1 5] a + t·n t = -2 MAIN DEGRAUTO FUNC 17/30 </pre>	<pre> b + t·n [t+3 1-2·t 2·t+5] solve(t+3 - 2·(1-2·t) + 2·(2·t+5) = -2) t = 3 b + t·n t = 3 [6 -5 11] b + t·n t = 3 MAIN DEGRAUTO FUNC 21/30 </pre>
$BC = AD$, also $D(10 \mid -1 \mid 13)$. Oder: D ist Lotfußpunkt von A auf ϵ_2 . $\ AB\ = 6$, $\ BC\ = 9$, folglich hat CG Länge 12.	<pre> [3 1 5] → b [3 1 5] [6 -5 11] → c [6 -5 11] a + c - b [10 -1 13] [10 -1 13] → d [10 -1 13] ans(1) → d MAIN DEGRAUTO FUNC 25/30 </pre>	<pre> [10 -1 13] → d [10 -1 13] norm(b - a) 6 norm(b - c) 9 648/6·9 648/(6·9) MAIN DEGRAUTO FUNC 28/30 </pre>
CG liegt auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen, also $n_1 \times n_2 = [2, -1, -2]^T$. Der hat Länge 3, also vervierfachen und in A, B, C, D anhängen. Zwei mögliche Lösungen: $E(15 \mid 1 \mid -1)$, $F(11 \mid -3 \mid -3)$, $G(14 \mid -9 \mid 3)$, $H(18 \mid -5 \mid 5)$ oder $E(-1 \mid 9 \mid 15)$, $F(-5 \mid 5 \mid 13)$, $G(-2 \mid -1 \mid 19)$, $H(2 \mid 3 \mid 21)$.	<pre> 6·9 crossP(n, [1 -2 2]) [6 -3 -6] [6 -3 -6] [2 -1 -2] [2 -1 -2]·4 [8 -4 -8] ans(1)·4 MAIN DEGRAUTO FUNC 30/30 </pre>	<pre> [2 -1 -2]·4 [8 -4 -8] a + [8 -4 -8] [15 1 -1] b + [8 -4 -8] [11 -3 -3] c + [8 -4 -8] [14 -9 3] d + [8 -4 -8] [18 -5 5] d + [8, -4, -8] MAIN DEGRAUTO FUNC 30/30 </pre>
Ersatzwerte:	$C(0 \mid 7 \mid -1)$, $D(4 \mid 11 \mid 1)$ Die Längen sind dieselben, ebenso die Richtung der Schnittgeraden. E und F gibt die gleichen Punkte. $E(15 \mid 1 \mid -1)$, $F(11 \mid -3 \mid -3)$, $G(8 \mid 3 \mid -9)$, $H(12 \mid 7 \mid -7)$ oder $E(-1 \mid 9 \mid 15)$, $F(-5 \mid 5 \mid 13)$, $G(-8 \mid 11 \mid 7)$, $H(-4 \mid 15 \mid 9)$.	

Aufgabe 4a)

<p>Quadratisches Ergänzen, "von Hand" $M(2 \mid -3 \mid 1/2)$, $r = 3/2$</p>	<pre> (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1/2)^2 (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1/2)^2 x^2 - 4x + y^2 + 6y + z^2 - z + 53/4 53/4 - 11 53/4 - 11 MAIN DEGRAUTO FUNC 3/30 </pre>	
---	---	--

Aufgabe 4b)

<p>$M(6 \mid -2 \mid -11)$ Ebene durch P, senkrecht zu SN. $5x + 2y + 14z - 52 = 0$</p>	<pre> [11 0 3] + n [11 0 3] [1 -4 -25] + s [1 -4 -25] n+s -> m [6 -2 -11] (n+s)/2 -> m MAIN DEGRAUTO FUNC 3/30 </pre>	<pre> n-m [5 2 14] [16 -7 -1] + p [16 -7 -1] dotP([5 2 14],[16 -7 -1]) [15,2,14],[16,-7,-1] MAIN DEGRAUTO FUNC 6/30 </pre>
<p>Diese Ebene mit SN schneiden. $Z(10 \mid -2/5 \mid 1/5)$ Radius $r = 9$.</p>	<pre> [5*t+6 2*t-2 14*t-11] solve(5*(5*t+6)+2*(2*t-2) t=4/5 m+t*(n-m) t=4/5 [10 -2/5 1/5] m+t*(n-m) t=4/5 MAIN DEGRAUTO FUNC 9/30 </pre>	<pre> m+t*(n-m) t=4/5 [10 -2/5 1/5] norm(p-z) 9 Norm(p-z) MAIN DEGRAUTO FUNC 11/30 </pre>
<p>Winkel zwischen MZ und MP rechnen und auf 90° ergänzen. Mit Skalarprodukt oder über tan, weil man die Längen des Dreiecks MPZ hat. Es ist der 53.13° nördliche Breitenkreis.</p>	<pre> norm(p-z) 9 norm(z-m) 12 tan^4(9/12) 36.869898 90 - 36.869897645844 53.130102 90-36.869897645844 MAIN DEGRAUTO FUNC 14/30 </pre>	

Aufgabe 4c)

<p>Abstände der Zentren $\ M_1M_2\ = 7 = r_1 + r_2$ $\ M_1M_3\ = 6 = r_1 + r_3$ $\ M_2M_3\ = 3 = r_2 + r_3$ Löse das Gleichungssystem. $r_1 = 5, r_2 = 2, r_3 = 1$.</p>	<pre> norm([5 4 8]-[3 1 2]) 7 norm([7 3 6]-[3 1 2]) 6 norm([7 3 6]-[5 4 8]) 3 Norm([7,3,6]-[5,4,8]) MAIN DEGRAUTO FUNC 3/30 </pre>	<pre> norm([7 3 6]-[3 1 2]) 6 norm([7 3 6]-[5 4 8]) 3 solve(x+y=7 and x+z= x=5 and y=2 and z=1 x+z=6 and y+z=3, {x,y,z}) MAIN DEGRAUTO FUNC 4/30 </pre>
---	--	---

Aufgabe 5a)

<p>Erste Teilfrage: 0.16. Zweite Teilfrage: (mindestens) 14 Würfe.</p>	$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \quad 4/25$ $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \quad .160000$ $\text{solve}\left(1 - \left(\frac{21}{25}\right)^x = .9, x\right)$ $x = 13.206426$ $\text{Solve}\left(1 - \left(\frac{21}{25}\right)^x = 0.9, x\right)$	
<small>MAIN DEG AUTO FUNC 3/30</small>		

Aufgabe 5b)

<p>Erste Teilfrage: Beginne eine (nicht abbrechende) GR. $a_1 = 2/5, q = (3/5)^2$. Gewinn-Wahrscheinlichkeit 62.5%</p>	$\frac{\frac{2}{5}}{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \quad 5/8$ $\frac{2/5}{1 - (3/5)^2}$	
<p>Abbrechende GR. $a_1 = 2/5, q = 3/5$, Suche s_{20} Wahrscheinlichkeit 99.996% Oder übers Gegenteil $1 - 0.6^{20} = 0.999963$</p>	$\frac{2/5 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{20}\right)}{1 - 3/5} \quad .999963$ $\frac{2/5 \cdot (1 - (3/5)^{20})}{1 - 3/5}$	
<small>MAIN DEG AUTO FUNC 6/30</small>		

Aufgabe 5c)

<p>A: "Es ist ein Original" B: "Es erschienen genau 5 Sterne" $P(A \cap B) = 0.1419$ $P(\neg A \cap B) = 0.0387$</p>	$\frac{5/8 \cdot nCr(12, 5) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7}{6928416}$ $\frac{5/8 \cdot nCr(12, 5) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7}{48828125}$ $\frac{5/8 \cdot nCr(12, 5) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7}{48828125} \quad .141894$ $\frac{5/8 \cdot nCr(12, 5) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^7}{48828125}$	$\frac{3/8 \cdot nCr(12, 5) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7}{649539}$ $\frac{3/8 \cdot nCr(12, 5) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7}{16777216}$ $\frac{3/8 \cdot nCr(12, 5) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7}{16777216} \quad .038716$ $\frac{3/8 \cdot nCr(12, 5) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7}{16777216}$
<p>$P(A B) = 0.7856$ 78.56%</p>	$\frac{.14189395968}{.14189395968 + .038715541} \quad .785640$ $\frac{.14189395968}{.14189395968 + .038715541}$	
<small>MAIN DEG AUTO FUNC 5/30</small>		

Aufgabe 6a)

Verteile 15 Personen auf 20 Sitzplätze.

$$\frac{20!}{5!} = 20274183401472000$$

$$\frac{20!}{5!}$$

Aufgabe 6b)

Wähle die Personen aus für den ersten Bus. 16, 17, ... 20 Personen.
Der Rest geht auf den zweiten Bus.

$$nCr(36, 16) + nCr(36, 17) + \dots + nCr(36, 20)$$

$$\sum_{x=16}^{20} nCr(36, x)$$

$$= 40885872720$$

Aufgabe 6c)

Binomialverteilung.
 $n = 45, p = 0.9.$
47.29%

$$\sum_{x=0}^{40} (nCr(45, x) \cdot (.9)^x \cdot (.1)^{45-x})$$

$$= .472862$$

Aufgabe 6d)

"Overbooking"-Problem
Normalverteilung, wobei n gesucht ist.
Löse $1.645 = \frac{120 - 0.9 \cdot n}{\sqrt{0.9 \cdot 0.1 \cdot n}}$ nach n auf.
Also 127 Buchungen. (Abrunden!)

$$1.9 \cdot 1 \cdot n = .300000 \cdot \sqrt{n}$$

$$\text{solve}(\text{phi}(z) = .95, z)$$

$$z = 1.644854$$

$$\text{solve}\left(1.645 = \frac{120 - .9 \cdot n}{.3 \cdot \sqrt{n}}, n\right)$$

$$n = 127.150276$$

$$\text{int}(\text{int}((120 - 0.9n) / (.3 \cdot \sqrt{n}), n))$$

Aufgabe 6e)

Hypothesentest:
 $H_0: p = 0.1$
 $H_1: p > 0.1$
 $s = 2.67\% < 5\%$
Also H_0 verwerfen.
Die Vermutung ist berechtigt.
Normalverteilung geht nicht, weil σ zu klein ist (Bildschirm rechts).

$$\sum_{x=0}^{80} (nCr(80, x) \cdot (.1)^x \cdot (.9)^{80-x})$$

$$= .026749$$

$$\sum_{x=14}^{80} (nCr(80, x) \cdot (.1)^x \cdot (.9)^{80-x})$$

$$= .026749$$

$$80 \cdot .1 = 8.000000$$

$$\sqrt{80 \cdot .1 \cdot .9} = 2.683282$$