Mathematik

1. **Kurvenbetrachtung, erster Teil**

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \dfrac{3x-2}{x^2}$.

a) Führe eine Kurvendiskussion durch.
(Definitionsbereich, Nullstelle, Polstelle, Asymptoten, Extremum, Wendepunkt).

b) In welchem Kurvenpunkt P muss man die Kurvennormale errichten, damit diese zur Wendetangente parallel liegt?

c) In welchem Kurvenpunkt Q muss man die Kurventangente legen, damit diese durch den Punkt $T\left(0 \mid \dfrac{4}{3}\right)$ geht? Bestimme alle Lösungen für Q.

d) Von welchen Punkten der y-Achse aus kann man ***keine*** Tangente an y = f(x) legen?

2. **Kurvenbetrachtung, zweiter Teil (Parameter gesucht)**

Verwende für diese Aufgabe soweit möglich exakte Werte.

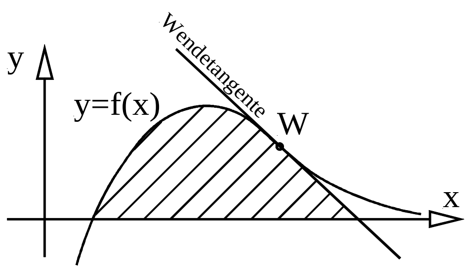
Für $t > 0$ ist die Funktionskurve $y = f_t(x) = \dfrac{3x-t}{x^2}$ gegeben.

a) Die im I. Quadranten unterhalb der Kurve liegende Fläche rotiert um die x-Achse. Der entstehende Rotationskörper soll das Volumen V = 3 haben. Wie gross ist t?

b) Für welchen Wert von t schneidet die Kurve die x-Achse unter dem Winkel $\alpha = 60°$?

c) Bestimme (in Abhängigkeit von t) die Koordinaten des Wendepunktes und weise nach (mit vollständiger Herleitung), dass die Gleichung der Wendetangente wie folgt lautet: $y = -\dfrac{1}{t^2}x + \dfrac{3}{t}$.

d) Durch die Kurve, die Wendetangente und die x-Achse wird eine Fläche begrenzt (siehe die untenstehende Figur).
Weise nach, dass diese Fläche konstant ist (d.h. unabhängig von t immer denselben Wert hat).



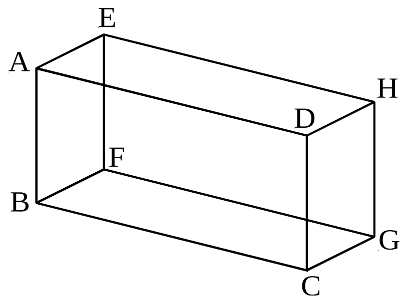
3. **Vektorgeometrie**

Gegeben ist der Punkt A(7 | 5 | 7), die Gerade g: (16 | –8 | 3) (20 | –9 | 0) sowie die Ebene ε_1: $2x + 2y + z - 13 = 0$.

a) Berechne den Schnittpunkt und den spitzen Zwischenwinkel zwischen g und ε_1.

b) Bestimme die Koordinatengleichung derjenigen Ebene ε_2, welche durch g geht und zu ε_1 senkrecht steht.
[Wer Teil b) nicht löst, kann mit der Ebene ε_2: $x - 2y + 2z + 16 = 0$ weiter arbeiten.]

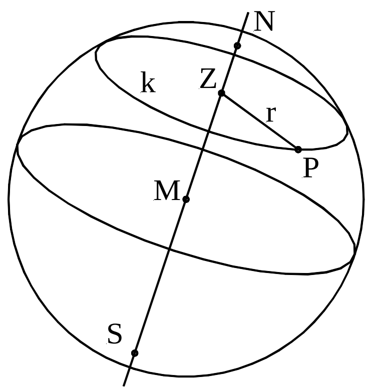
c) Gesucht ist ein Quader (siehe rechts die *nicht* massstäbliche Figur) mit dem gegebenen Punkt A, wobei das Rechteck BCGF in der Ebene ε_1 und das Rechteck CGHD in der Ebene ε_2 liegen soll.
Der Quader soll ein Volumen von V = 648 haben.
Bestimme die Koordinaten aller Eckpunkte des Quaders.



4. **Kugeln (Thema mit Variationen)**

a) Eine Kugel ist gegeben durch $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - z + 11 = 0$.
Bestimme Mittelpunkt und Radius dieser Kugel.

b) Von einer Kugel kennt man den Durchmesser Nordpol-Südpol sowie den Punkt P (siehe die Figur mit eingezeichnetem Äquator).
N(11 | 0 | 3), S(1 | –4 | –25), P(16 | –7 | –1)
Vom Breitenkreis k durch P bestimme das Zentrum Z, den Radius r sowie die Koordinatengleichung der Ebene, in welcher der Kreis liegt.
Um welchen Breitenkreis handelt es sich? (Es wird ein Ergebnis der Art "21.1° nördliche Breite" erwartet.)



c) Drei Kugeln sollen sich gegenseitig und von aussen berühren.
Man kennt die Zentren $M_1(3 | 1 | 2)$, $M_2(5 | 4 | 8)$ und $M_3(7 | 3 | 6)$.
Bestimme die Radien der drei Kugeln.

5. **Wurfstäbe**

Wurfstäbe zeigen eines der folgenden 4 Zeichen: ●, ■, ✶ oder ✚. Allerdings ist die Wahrscheinlichkeit für ein ✶ doppelt so gross wie die Wahrscheinlichkeit für jeweils eines der anderen drei Zeichen.

a) Zwei Wurfstäbe werden miteinander geworfen. Hierzu zwei Teilfragen:
   a_1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man ein Doppel-✶?
   a_2) Wie viele Würfe muss man durchführen, damit man mit 90%-iger Sicherheit mindestens ein Doppel-✶ erhalten hat?

b) Zwei Spieler werfen in einem Spiel abwechslungsweise einen Wurfstab. Wer zuerst ein ✶ erhält, hat gewonnen (das Spiel ist sofort zu Ende). Dazu zwei Teilfragen:
   b_1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Spieler, der den ersten Wurf ausführt?
   b_2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht der Sieger nach spätestens 20 Würfen fest?

c) In einem Behälter hat man 5 originale Wurfstäbe (wie oben beschrieben) und drei Fälschungen, die alle vier Zeichen mit gleicher Wahrscheinlichkeit zeigen. Man wählt blind einen Wurfstab und wirft ihn 12 Mal. Dabei erscheinen genau fünf ✶. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich beim gewählten Stab um ein Original?

6. **Kleinunternehmen**

Die Microbus AG führt 6 Kleinbusse mit je 20 Plätzen.

a) Eine Gruppe von 15 Personen bucht einen Kleinbus. Auf wie viele Arten können sie sich auf die Sitzplätze im Bus verteilen?

b) Eine Gesellschaft von 36 Personen bucht 2 Kleinbusse. Auf wie viele Arten können sich die Teilnehmenden auf die beiden Busse verteilen? (Die Sitzordnung innerhalb der Busse wird hier ***nicht*** berücksichtigt. Die Busse sind unterscheidbar.)

c) Die Microbus AG weiss aus statistischen Erhebungen, dass durchschnittlich 10% der Personen, die eine Fahrt buchen, die Buchung absagen. 45 Personen haben sich für eine Fahrt nach Venedig angemeldet. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Kleinbusse ausreichen, weil höchstens 40 Personen erscheinen?

d) Die Microbus AG organisiert jährlich mit allen ihren 6 Bussen einen grossen Ausflug. Um die 10% der Buchungen, die durchschnittlich abgesagt werden, zu kompensieren, werden mehr Tickets verkauft als Plätze zur Verfügung stehen. Wie viele Buchungen darf die Microbus AG maximal entgegennehmen, damit mit 95%-iger Sicherheit jeder Käufer einen Platz erhält?

e) Die Microbus AG vermutet, dass in letzter Zeit die Anzahl der Absagen zugenommen hat. Bei der nächsten 80 Buchungen werden 14 Absagen registriert. Ist die Vermutung der Microbus AG statistisch haltbar? (Formuliere ausführlich, $\alpha = 5\%$)

****