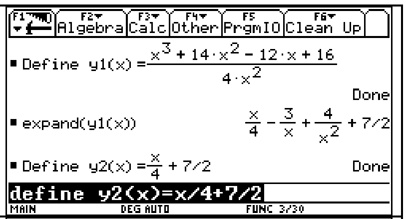
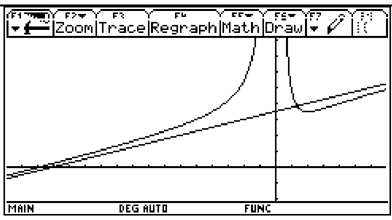
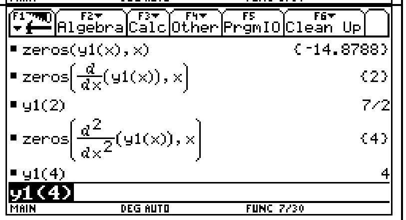
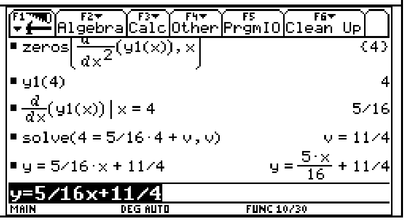
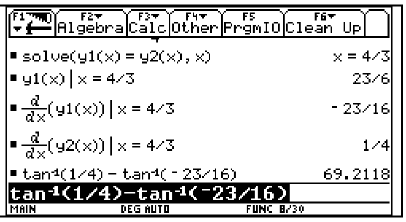
Lösung Matura 6G (2009)

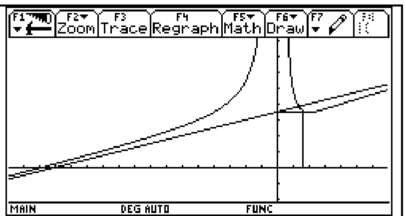
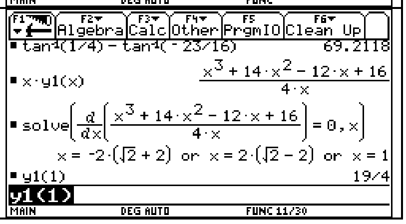
Aufgabe 1a)

<table>
<tr><td>Definiere die Funktion.
D = R \ {0},
Asymptoten x = 0, y = x/4 + 7/2
Nullstelle (–14.88 | 0)
Minimum (2 | 7/2), Wendepunkt (4 | 4)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Funktionsgraph: </td><td>
</td></tr>
<tr><td>Gleichung der Wendetangente:
$y=\frac{5}{16}x+\frac{11}{4}$</td><td>
</td></tr>
</table>

Aufgabe 1b)

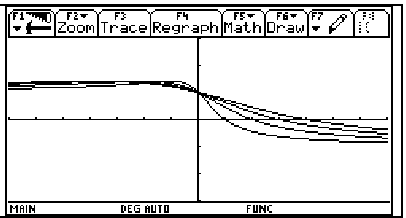
<table>
<tr><td>Berechne den Schnittpunkt S(4/3 | 23/6)
die beiden Steigungen,
dann den Zwischenwinkel. 69.212°</td><td>
</td></tr>
</table>

Aufgabe 1c)

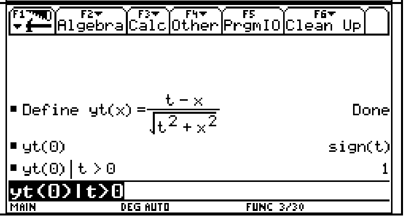
<table>
<tr><td>Das Rechteck hat Seiten x und f(x). Also muss x·f(x) minimal werden.</td><td></td></tr>
<tr><td>Ableiten und nullsetzen. Nur x = 1 liefert einen Punkt im I. Quadranten.
Also P(1 | 19/4)</td><td>
</td></tr>
</table>

Aufgabe 2a)

Hinweis: Anzeige für die Werte t = 1, 2, 3, 4

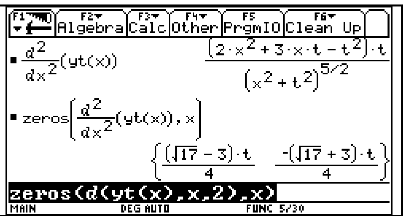


Offensichtlich ist f(0) = 1

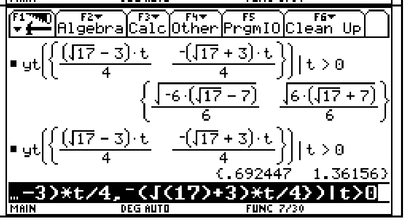


Aufgabe 2b)

Bestimme zunächst die x-Koordinaten der Wendepunkte:

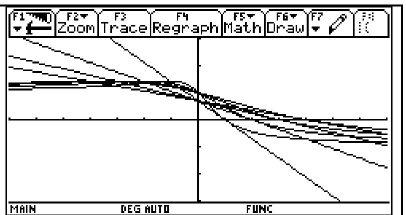


Die y-Koordinaten sind unabhängig von t, und es sind genau zwei verschiedene Werte möglich.



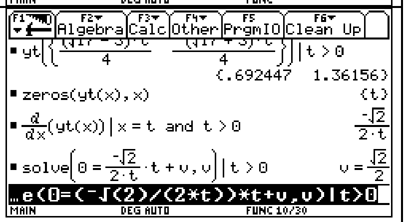
Aufgabe 2c)

Das ist die Grafik mit den Tangenten.
Man vermutet, dass sich die Tangenten auf der y-Achse schneiden.

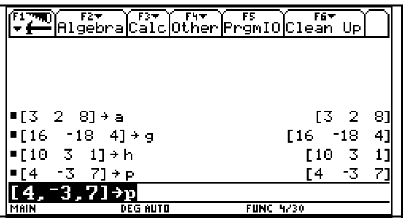
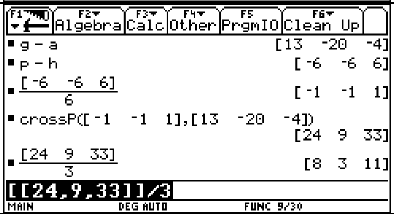
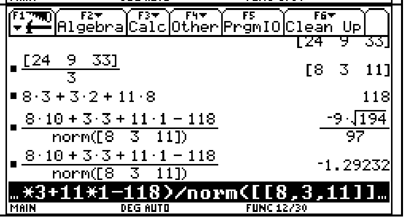


Bestimme die Nullstelle x = t und darin die Steigung.
Löse dann den Ansatz y = mx + v nach v auf.
Man erkennt, dass v unabhängig ist von t.

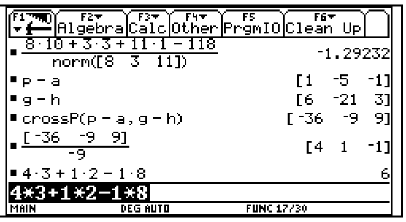
Somit schneiden sich die Tangenten im Punkt $P\left(0 \mid \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



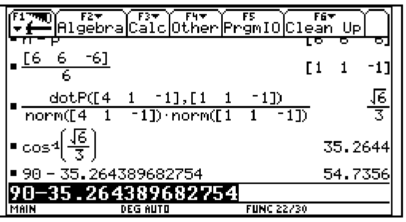
Aufgabe 3a)

Speichere die Punkte.	
Das Vektorprodukt der Richtungen der Lichtstrahlen gibt den Normalenvektor auf die Ebene durch AG parallel zu HP.	
Koordinatengleichung der Ebene durch AG: $8x + 3y + 11z – 118 = 0$ H in die HNF einsetzen. Abstand d = 1.292 (Ebene durch H und P hat Gleichung $8x + 3y + 11z + 100 = 0$)	

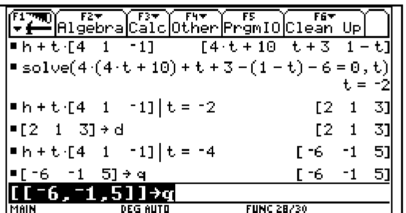
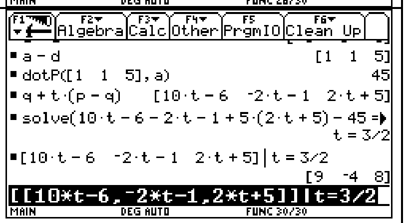
Aufgabe 3b)

Man hat 2 Richtungen, nämlich AP und HG. Das Vektorprodukt davon ergibt den Normalenvektor auf die Ebene ABCD. Oder B(9 | –19 | 11) A einsetzen. Man muss mit –6 ergänzen. Also stimmt $4x + y – z – 6 = 0$	

Aufgabe 3c)

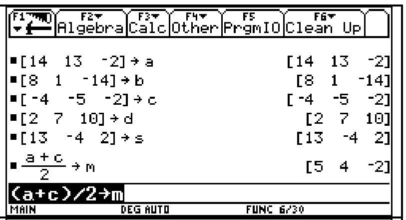
Winkel zwischen PH und dem Normalenvektor auf ABCD, auf 90° ergänzen. Der gesuchte Winkel beträgt 54.736°	

Aufgabe 3d)

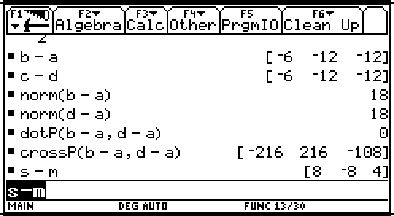
Lege das Lot von H aus auf die Ebene ABCD. Der Schnittpunkt (t = –2) ergibt D(2 | 1 | 3) . Der gespiegelte Punkt (t = –4) sei Q(–6 | –1 | 5) .	
AD ist Normalenvektor auf die Ebene ABFE Die Koordinatengleichung der Ebene ABFE lautet $x + y + 5z – 45 = 0$. Bilde aus Q und P eine Gerade und schneide mit der Ebene ABFE. Der gesuchte Punkt ist (9 | –4 | 8)	

Aufgabe 4a)

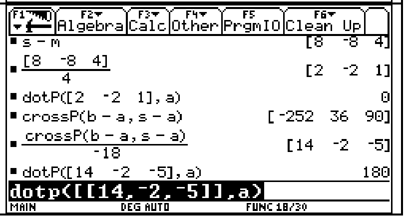
Speichere die Punkte und berechne den Mittelpunkt M



Betrachte ABCD. Zeige, dass es ein Quadrat ist.
AB und DC sind identisch. Damit ist es ein Parallelogramm.
AB und AD sind gleich lang. Damit ist es ein Rhombus.
AB und AD stehen senkrecht aufeinander. QED
AB × AD ist parallel zu MS und zu $[2 , -2 , 1]^T$.

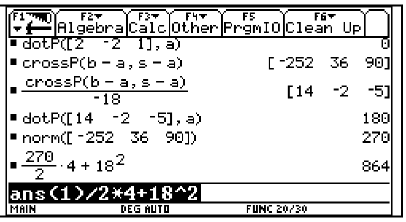


Die Koordinatengleichung von ABCD lautet
$2x - 2y + z = 0$
Die Koordinatengleichung von ABS lautet
$14x - 2y - 5z - 180 = 0$



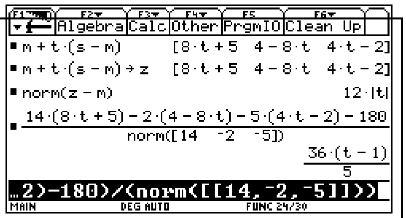
Aufgabe 4b)

Die Norm von AB × AS ist die Fläche von 2 Dreiecken.
Dazu das Bodenquadrat.
Oberfläche O = 864.

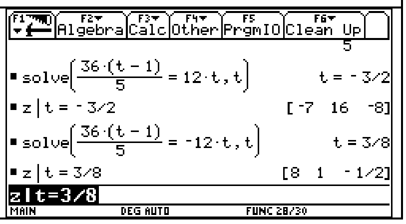


Aufgabe 4c)

Z liegt sicher auf der Geraden MS und der Kugelradius ist der Abstand von Z zu M.
Bilde von der Ebene ABS die HNF und setze Z ein.

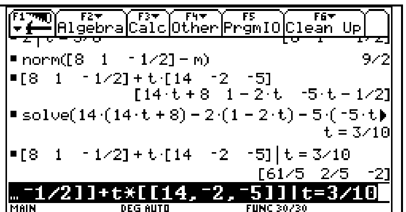


Die beiden Abstände müssen gleich sein.
Für t = –3/2 gibt es die Ankugel (=Ersatzwert Z(–7 | 16 | –8))
Für t = 3/8 gibt es die Inkugel.
Also Z(8 | 1 | –1/2)

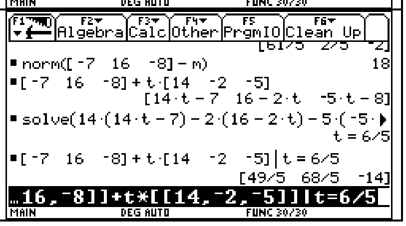


Aufgabe 4d)

r = ||ZM|| = 9/2.
Kugelgleichung $(x - 8)^2 + (y - 1)^2 + (z + ½)^2 = (9/2)^2$.
Lege das Lot von Z auf die Ebene ABS und schneide.
Berührpunkt (61/5 | 2/5 | –2) = (12.2 | 0.4 | –2)

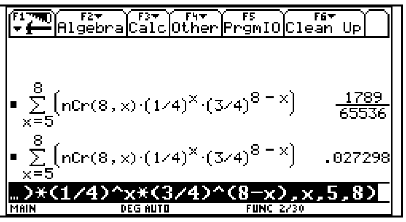


Ersatzwert (Ankugel)
r = ||ZM|| = 18.
Kugelgleichung $(x + 7)^2 + (y - 16)^2 + (z + 8)^2 = (18)^2 = 324$.
Lege das Lot von Z auf die Ebene ABS und schneide.
Berührpunkt (49/5 | 68/5 | –14) = (9.8 | 13.6 | –14)



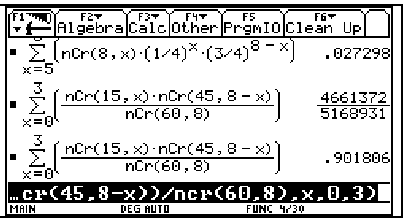
Aufgabe 5a)

Ziehen mit Zurücklegen (Binomialverteilung)
2.73%



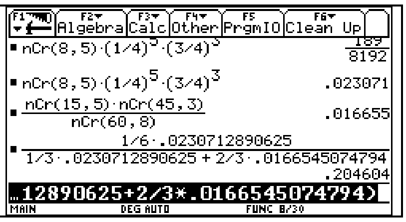
Aufgabe 5b)

Ziehen ohne Zurücklegen
90.18%



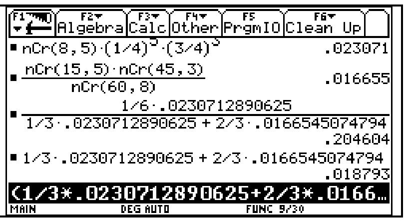
Aufgabe 5c)

Bedingte Wahrscheinlichkeit
Wahrscheinlichkeit für den günstigen Pfad: 1/6 · 0.0231
Mögliche Pfade 1/3 · 0.0231 + 2/3 · 0.0167
P(A | B) = 20.46%



Aufgabe 5d)

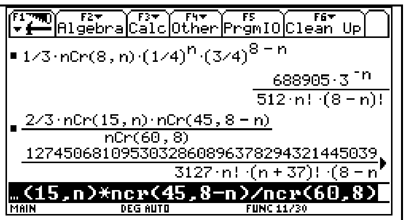
Das ist der Nenner aus Aufgabe 5c)
1.88%



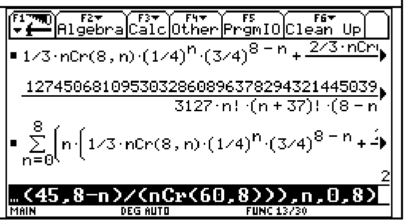
Aufgabe 5e)

Verallgemeinerung:

$$p_n = \frac{1}{3}\cdot\binom{8}{n}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{8-n} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\binom{15}{n}\cdot\binom{45}{8-n}}{\binom{60}{8}}$$



$$E(X) = \sum_{n=0}^{8} n\cdot p_n = 2$$



Aufgabe 6a)

Das Integral ist von Hand zu lösen.
Also f'(x) = (x – 4), f(x) = ½ x^2 – 4x
und g(x) = ln(x), g'(x) = 1/x

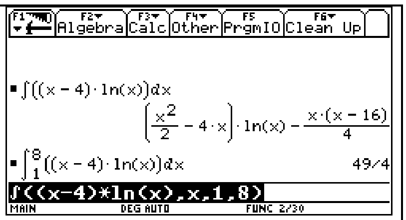
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\cdot \ln(x)\Big|_1^8 - \int_1^8 \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\cdot \frac{1}{x}\,dx$$

Dann das hintere Integral ausrechnen,

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\cdot \ln(x)\Big|_1^8 - \int_1^8 \left(\frac{1}{2}x - 4\right)dx$$

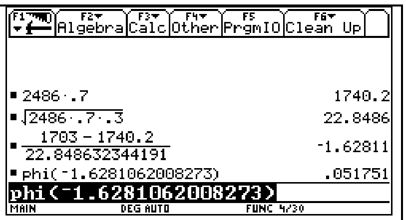
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\cdot \ln(x)\Big|_1^8 - \left(\frac{1}{4}x^2 - 4x\right)\Big|_1^8$$

schliesslich die Grenzen einsetzen:
= (32 – 32)·ln(8) – (...)·ln(1) – [(16 – 32) – (1/4 – 4)]
= 0 – 0 – [–16 – (–3.75)] = 12.25.



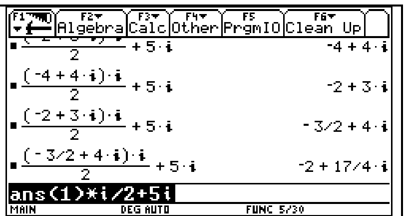
Aufgabe 6b)

Hypothesentest: H_0: p = 0.7
Mittelwert μ = 1740.2, also ist 1703 zu wenig.
H_1: p < 0.7.
σ = 22.85, z = –1.628
Φ(–1.628) = 0.052
Also ist die Behauptung des Radiosenders gerade noch haltbar (aber sehr kritisch).



Aufgabe 6c)

a_2 bis a_5 siehe rechts



Stelle drei Gleichungen auf und löse das Gleichungssystem.
t = 8, p = –2 + 4i, q = i/2.