Mathematik

Klassen 6J und 6K O. Riesen

1. **Kurvenbetrachtungen**

Für jedes t > 0 ist durch $y = f_t(x) = t \cdot e^{-t \cdot x^2}$ eine Funktion gegeben.

a) Setze t = ½, d.h. betrachte die Kurve $y = f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$ und führe eine Kurvendiskussion durch. Verlangt werden:
- Definitionsbereich, Symmetrie, Asymptoten;
- die exakten Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte (Nullstellen, Extremas, Wendepunkte);
- die Gleichung *einer* Wendetangente (löse mit exakten Werten).

b) Die Kurven $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$ schneiden sich im I. Quadranten. Bestimme diesen Schnittpunkt und dort den Schnittwinkel.

c) Löse allgemein: Bestimme die Koordinaten der Wendepunkte in Abhängigkeit von t. Alle diese Wendepunkte liegen auf einer weiteren Kurve. Bestimme deren Funktionsgleichung.

2. **Flächenverhältnisse (Thema mit Variationen)**

Die folgenden Teilaufgaben sind voneinander unabhängig.

a) In welchem Verhältnis teilt die Gerade $y = 4 - 2x$ die im I. Quadranten unterhalb der Kurve zu $y = 3x^2 - x^3$ liegende Fläche?

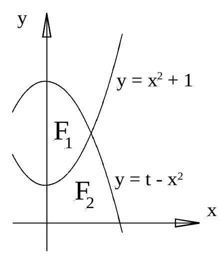
b) Betrachte die im I. Quadranten unterhalb der Kurve zu $y = 2x - x^2$ liegende Fläche. Diese Fläche soll durch eine Gerade, welche durch den Koordinatenursprung geht, halbiert werden. Bestimme die Gleichung dieser Geraden.

c) Die im I. Quadranten unterhalb der Kurve zu $y = t - x^2$ liegende Fläche wird von der Parabel $y = x^2 + 1$ in zwei Teilflächen geteilt (siehe die Figur). Dabei ist t > 1.

c1) Setze t = 2 und berechne das Verhältnis $F_1 : F_2$.

c2) Berechne das Verhältnis $F_1 : F_2$ allgemein.

c3) Das Verhältnis $F_1 : F_2$ kann einen gewissen Wert nicht überschreiten. Welchen?



3. **Kugeln (Vektorgeometrie)**

Gegeben sind die Punkte P(4 | 5 | 3) und Q(1 | 6 | –1), die Ebene ε: x + 2y + 2z + 24 = 0 sowie die Gerade g: (4 | –2 | 11) (5 | –5 | 16).

a) Gesucht ist die Kugel k so, dass P und Q auf der Kugelfläche liegen und das Kugelzentrum auf der Geraden g liegt. Bestimme das Kugelzentrum M sowie die Kugelgleichung.

[Eine Hilfe zum Weiterrechnen, für die, die a) nicht lösen: M(2 | 4 | 1).]

b) Welcher Punkt auf der Kugel k liegt am nächsten zur Ebene ε?

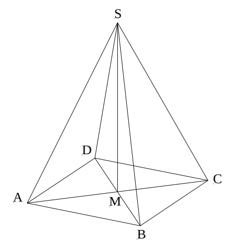
Forts. auf Seite 2

c) Betrachte die beiden Tangentialebenen in P resp. Q. Bestimme Schnittwinkel und Schnittgerade dieser beiden Tangentialebenen.

d) Hier ist noch eine zweite Kugel gegeben: $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 22y + 6z + 117 = 0$. Entscheide und begründe, ob sich die beiden Kugeln schneiden, berühren oder meiden.

4. **Eine Pyramide**

Von einer Pyramide, deren Bodenfläche ABCD ein Parallelogramm ist, kennt man die Eckpunkte A(28 | 27 | –1), B(13 | 15 | 5), C(–20 | –21 | –1) sowie S(12 | –5 | 3).



a) Weise nach, dass das Lot von S auf die Ebene ABC durch den Diagonalenschnittpunkt M des Parallelogramms geht.

b) Berechne das Volumen der Pyramide.

Eine Zwischenbemerkung zu den Aufgaben c) und d):
Räumlich genau formulierte Lösungswege ergeben selbstverständlich Teilpunkte.

c) Es gibt genau einen Punkt auf der Strecke SM, welcher von den Ebenen ABC und ABS gleiche Entfernung hat. Bestimme die Koordinaten dieses Punktes.

d) Es gibt genau einen Punkt auf der Strecke AS, welcher vom Punkt S und der Ebene ABC gleiche Entfernung hat. Bestimme die Koordinaten dieses Punktes.

5. **Mr X spielt gegen Mr Y.**

Mr X und Mr Y treffen sich zu einem Spielabend, welcher von einem neutralen, fairen Schiedsrichter geleitet wird.
Jeder Spieler bringt 2 Würfel mit. Die Würfel von Mr X sind übliche, symmetrische Würfel, hingegen hat Mr Y zwei gefälschte Würfel A und B (aber das sieht man den Würfeln nicht an). Sie zeigen die Zahlen 1 bis 6 mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten:

Zahl	1	2	3	4	5	6
Würfel A : p =	$\frac{2}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{7}{27}$
Würfel B : p =	0.27	0.18	0.17	0.15	0.13	0.10

Jeder Spieler wirft seine beiden Würfel einmal.

a) Beim ersten Spiel geht es darum, die Augensumme 4 zu erzielen. Welcher Spieler ist bei diesem Spiel im Vorteil?

b) Beim zweiten Spiel gewinnt derjenige, der auf seinen beiden Würfeln die *gleiche, vorher festgelegte* Zahl erreicht (z.B. Doppel-Drei, so genanntes Dreier-Pasch).
- Welche Augenzahl ist aus deiner Sicht für Mr X am günstigsten?
- Welche Augenzahl ist aus deiner Sicht für Mr Y am günstigsten?
- Welche Augenzahl würdest du dem Schiedsrichter empfehlen?

c) Beim dritten Spiel gewinnt, wer zwei verschiedene Zahlen auf seinen beiden Würfeln hat. Welcher der beiden Spieler ist bei diesem Spiel im Vorteil?

d) Zum Schluss legen die beiden Spieler ihre Würfel auf den Tisch. Der Schiedsrichter wählt blind einen der vier Würfel und wirft ihn zweimal. Dabei erhält er zwei Sechser. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der Schiedsrichter den Würfel A erwischt?

6. **Kurzaufgaben aus verschiedenen Gebieten**

a) **Zahlenfolge**

Eine Folge ist rekursiv definiert durch $a_1 = 0; \quad a_{n+1} = a_n + 6n \cdot (n+2)$.

Die explizite Definition dieser Folge hat die Form $a_n = p \cdot n^3 + q \cdot n^2 + r \cdot n$.

Bestimme p, q und r.

b) **Asterix und Obelix**

32 Gallier sind auf Feldzug gegen die Römer. Sie finden Unterkunft in einer Herberge, welche Schlafsäle zu 8, 10 resp. 14 Betten hat. Dazu zwei Fragen:
Auf wie viele Arten können sich die Gallier auf die drei Schlafsäle verteilen?
Und wie viele Verteilungen sind möglich, wenn Asterix und Obelix im gleichen Schlafsaal übernachten wollen?

c) **Würfel**

Wir beobachten, dass beim Wurf eines Würfels ziemlich häufig die "2" erscheint. Von 105 Würfen waren es 23 Zweier. Welche statistische Folgerung ziehen wir daraus? ($\alpha = 5\%$)

d) **Jassen**

Ein übliches Jasskartenspiel hat 36 Karten, nämlich je 9 in den 4 "Farben" Schellen, Schilten, Rose, Eicheln. Ich erhalte 9 Karten. Wie viele verschiedene "Farben" werde ich durchschnittlich erhalten?

****