

Lösung Matura 6B (2006)

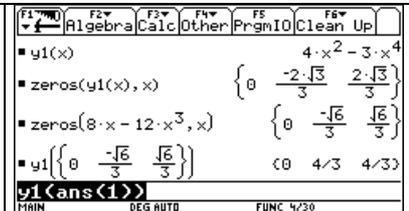
Aufgabe 1a)

Definiere die Funktion. (Die Funktion ist gerade.)

Nullstellen $(0 | 0)$, $\left(\pm \frac{2\sqrt{3}}{3} | 0\right)$

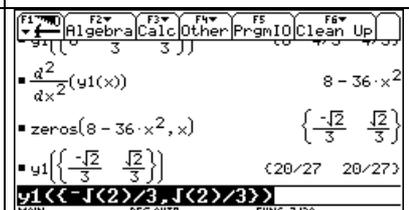
$y' = 8x - 12x^3$. $y' = 0$ nach x auflösen und einsetzen.

Ein Minimum in $(0 | 0)$ und zwei Maxima. $\left(\pm \frac{\sqrt{6}}{3} | \frac{4}{3}\right)$

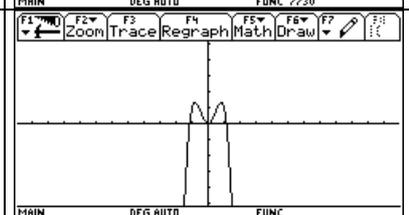


$y'' = 8 - 36x^2$. Nullstellen davon bestimmen. Einsetzen.

2 Wendepunkte $\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{3} | \frac{20}{27}\right)$

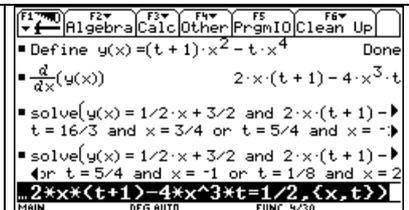


Zur Illustration ist hier noch die Grafik angezeigt:
Die Skizze war nicht verlangt.



Aufgabe 1b)

Definiere $y(x) = (t + 1)x^2 - tx^4$ und bestimme $y'(x)$.



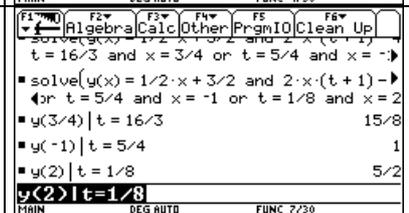
Dann muss $y(x) = 1/2x + 3/2$ sowie $y'(x) = 1/2$ sein.

Lasse nach x und t auflösen. Das gibt

I) $t = 16/3$, $x = 3/4$, also den Berührungspunkt $(3/4 | 15/8)$

II) $t = 5/4$, $x = -1$, also den Berührungspunkt $(-1 | 1)$

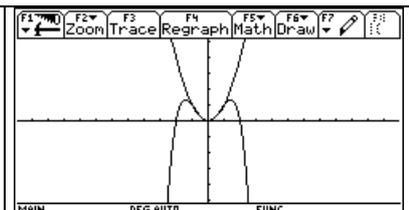
III) $t = 1/8$, $x = 2$, also den Berührungspunkt $(2 | 5/2)$



Aufgabe 1c)

Definiere $y_1(x)$ neu für $t = 1/3$ und $y_2(x) = x^2$

Die Grafik zeigt, dass die linke Teilfläche sehr klein wird.



Die Nullstelle liegt bei $(2 | 0)$, der Schnittpunkt liegt bei $x = 1$.

Calculator screen showing the following steps:

- Define $y_1(x) = y(x) | t = 1/3$ Done
- Define $y_2(x) = x^2$ Done
- zeros($y_1(x), x$) $\{-2 \ 0 \ 2\}$
- solve($y_1(x) = y_2(x), x$) $x = 1$ or $x = 0$ or $x = -1$
- solve($y_1(x) = y_2(x), x$)**

Schreibe die Teilflächen als Integrale

Fläche total: $64/45$

Fläche zwischen den Kurven (linke Teilfläche): $2/45$.

Also ist die rechte Teilfläche $62/45$ und das Verhältnis ist

$2 : 62$ resp. $1 : 31$.

Calculator screen showing the following steps:

- zeros($y_1(x), x$) $\{-2 \ 0 \ 2\}$
- solve($y_1(x) = y_2(x), x$) $x = 1$ or $x = 0$ or $x = -1$
- $\int_0^2 y_1(x) dx$ $64/45$
- $\int_0^1 (y_1(x) - y_2(x)) dx$ $2/45$
- $64/45 - 2/45$ $62/45$
- $64/45 - 2/45$**

Aufgabe 1d)

Definiere $y(x)$ wieder allgemein.

Berechne die Nullstellen.

Schreibe die Fläche als Integral

Calculator screen showing the following steps:

- Define $y(x) = (t+1) \cdot x - t \cdot x$ Done
- solve($y(x) = 0, x$) $| t > 0$
- $x = -\frac{t+1}{t}$ or $x = \frac{t+1}{t}$ or $x = 0$
- $\int_0^{\frac{t+1}{t}} y(x) dx$ $\frac{2 \cdot (t+1)^{5/2}}{15 \cdot t^{3/2}}$
- $f(y(x), x, 0, \frac{t+1}{t}) / (t)$**

Ableiten des Ausdrucks nach t

und nullsetzen.

Somit $t = 3/2$.

Calculator screen showing the following steps:

- $\frac{d}{dt} \left(\frac{2 \cdot (t+1)^{5/2}}{15 \cdot t^{3/2}} \right)$ $\frac{(t+1)^{3/2}}{3 \cdot t^{3/2}} - \frac{(t+1)^{5/2}}{5 \cdot t^{5/2}}$
- solve $\left(\frac{(t+1)^{3/2}}{3 \cdot t^{3/2}} - \frac{(t+1)^{5/2}}{5 \cdot t^{5/2}} = 0, t \right)$
- $t = 3/2$ or $t = -1$
- $(t+1)^{(5/2)} / (5 \cdot t^{(5/2)}) = 0, t$**

Einsetzen in das Integral.

Minimale Fläche 0.71722

Calculator screen showing the following steps:

- $\int_0^{\frac{t+1}{t}} y(x) dx | t = 3/2$ $\frac{5 \cdot 15^{3/2}}{162} - \frac{15^{5/2}}{810}$
- $\int_0^{\frac{t+1}{t}} y(x) dx | t = 3/2$ $.717219$
- $f(y(x), x, 0, \frac{t+1}{t}) / (t) | t = 3/2$**

Aufgabe 2a)

Definiere die Funktion und bestimme die Nullstellen von y'' .
Die Wendepunkte sind $(1 | -1)$ und $(6 | 23/72)$

$y_1(x) = \frac{6}{x^3} - \frac{42}{x^4} + \frac{36}{x^5}$ Done
 $\frac{d^2}{dx^2}(y_1(x)) = \frac{6}{x^3} - \frac{42}{x^4} + \frac{36}{x^5}$
 $\text{solve}\left(\frac{6}{x^3} - \frac{42}{x^4} + \frac{36}{x^5} = 0, x\right)$
 $x = 6$ or $x = 1$
1ue(6/x^3-42/x^4+36/x^5=0,x)

Wendetangente an der Stelle $x = 6$.
 y -Koordinate
Steigung, dann y -Achsenabschnitt bestimmen.
Definiere die Tangente als neue Funktion $y_2(x)$

$y_1(6) = \frac{23}{72}$
 $\frac{d}{dx}(y_1(x))|_{x=6} = -\frac{11}{432}$
 $\text{solve}\left(\frac{23}{72} = -\frac{11}{432} \cdot 6 + v, v\right)$ $v = 17/36$
 $\text{Define } y_2(x) = -\frac{11}{432} \cdot x + 17/36$ Done
define y2(x)=-11/432*x+17/36

Dasselbe für die Wendetangente an der Stelle $x = 1$.
Definiere die Tangente als $y_3(x)$

$y_1(1) = -1$
 $\frac{d}{dx}(y_1(x))|_{x=1} = 2$
 $\text{solve}(-1 = 2 \cdot 1 + v, v)$ $v = -3$
 $\text{Define } y_3(x) = 2 \cdot x - 3$ Done
Define y3(x)=2*x-3

Schnittpunkt der Tangenten $S(1.714 | 0.429)$

Zwischenwinkel 64.89° .

$\text{Define } y_3(x) = 2 \cdot x - 3$ Done
 $\text{solve}(y_2(x) = y_3(x), x)$ $x = 12/7$
 $y_2(12/7) = 3/7$
 $\tan^{-1}(2) = 63.4349$
 $\tan^{-1}\left(-\frac{11}{432}\right) = -1.45861$
 $63.434948822922 - -1.4586051312122 = 64.8936$
34948822922 - 1.4586051312122

Aufgabe 2b)

Definiere die Funktion und bestimme den Wendepunkt.

$y_1(x) = 2 \cdot x \cdot e^x + 1$
 $\frac{d^2}{dx^2}(y_1(x)) = (2 \cdot e \cdot x + 4 \cdot e) \cdot e^x$
 $\text{solve}((2 \cdot e \cdot x + 4 \cdot e) \cdot e^x = 0, x)$ $x = -2$
 $y_1(-2) = -4 \cdot e^{-1}$
y1(-2)

Dann bestimme die Wendetangente
und definiere sie als $y_2(x)$.

$y_2(-4) = 0$, also geht die Wendetangente exakt durch $(-4 | 0)$.

$y_1(-2) = -4 \cdot e^{-1}$
 $\frac{d}{dx}(y_1(x))|_{x=-2} = -2 \cdot e^{-1}$
 $\text{solve}(-4 \cdot e^{-1} = -2 \cdot 2 \cdot e^{-1} + v, v)$ $v = -8 \cdot e^{-1}$
 $\text{Define } y_2(x) = -2 \cdot e^{-1} \cdot x + -8 \cdot e^{-1}$ Done
 $y_2(-4) = 0$
y2(-4)

Aufgabe 2c)

Definiere die Funktion,
bestimme y''

$\text{Define } y(x) = \ln\left(\frac{x^2+t}{2 \cdot t}\right)$ Done
 $\frac{d^2}{dx^2}(y(x)) = \frac{-2 \cdot (x^2-t)}{(x^2+t)^2}$
d^2(y(x))/x,2

Die Wendepunkte liegen auf der x -Achse.

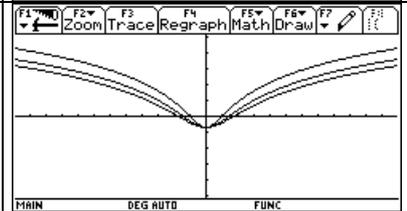
$\frac{d^2}{dx^2}(y(x)) = \frac{-2 \cdot (x^2-t)}{(x^2+t)^2}$
 $\text{solve}\left(\frac{-2 \cdot (x^2-t)}{(x^2+t)^2} = 0, x\right) | t > 0$
 $x = -\sqrt{t}$ or $x = \sqrt{t}$
 $y(\sqrt{t}) = 0$
y(t)

Für die Wendetangente ist $v = -1$, d.h. die Wendetangente geht sicher durch $(0 | -1)$, und zwar unabhängig von t .

TI-84 Plus calculator screen showing algebraic calculations:

- Function: $(x^2 + t)^{-2}$
- Solving for x : $x = -\sqrt{t}$ or $x = \sqrt{t}$
- Derivative: $y(\sqrt{t})$
- Derivative at $x = \sqrt{t}$: $-\frac{d}{dx}(y(x)) | x = \sqrt{t} = \frac{0}{\sqrt{t}}$
- Solving for v : $\text{solve}\left(0 = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \sqrt{t} + v, v\right) \Rightarrow v = -1$
- Command: $\text{solve}(0=1/\sqrt{t} * \sqrt{t} + v, v)$

Die Figur zeigt noch die Situation für $t = 1, 2, 3$.



Aufgabe 3a)

<p>P einsetzen in die HNF Der Abstand ist 3.5</p>	
---	--

Aufgabe 3b)

<p>A ist der Lotfußpunkt von E auf die Ebene. A(7 -8 -2)</p>	
--	--

<p>C ist der Lotfußpunkt von P auf die Ebene. C(19 -2 2)</p>	
--	--

<p>M ist der Mittelpunkt von AC. M(13 -5 0). Die Länge von MC ist 7. Bestimme das Vektorprodukt vom Normalenvektor der Ebene mit MC. Dieser Vektor ist noch zu lang, (Länge 49), zeigt aber sicher in Richtung von MD und MB.</p>	
---	--

<p>Also kürzen wir mit 7. Diesen Vektor hängen wir in M an. B(10 -3 6) D(16 -7 -6) (oder umgekehrt. B und D sind vertauschbar.)</p>	
---	--

<p>Berechne den Vektor AE und hänge ihn in B, C, D an. F(4 15 -3) G(13 16 -7) H(10 11 -15) (oder mit vertauschten Punkten F und H.)</p>	
---	--

Aufgabe 3c)

<p>Rechne 2 Vektoren, z.B. AE und AP. Norm des Kreuzproduktvektors, davon die Hälfte. (Standardformel für eine Dreiecksfläche.) F = 147. Die Fläche erhält man auch über Grundlinie mal Höhe, wobei die Grundlinie die Länge von AE, die Höhe die Länge von AC ist, weil P auf der Gegenkante liegt.</p>	
--	--

Aufgabe 4a)

Speichere die Gerade

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$[2 \ -6 \ 12] - [1 \ -7 \ 13] \quad [1 \ 1 \ -1]$ $[1 \ -7 \ 13] + t \cdot [1 \ 1 \ -1]$ $[t+1 \ t-7 \ 13-t]$					
$t+1 \rightarrow x$ $t-7 \rightarrow y$ $13-t \rightarrow z$					
13-t+z					
MAIN DEG AUTO FUNC 5/30					

Schneide die Gerade mit der Kugel

$$S_1(5 \mid -3 \mid 9)$$

$$S_2(9 \mid 1 \mid 5)$$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 36$ $3 \cdot t^2 - 36 \cdot t + 132 = 36$ $\text{solve}((x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 36, t)$ $t = 8 \text{ or } t = 4$					
$[x \ y \ z] t = 4$ $[x \ y \ z] t = 8$					
[x,y,z] t=8					
MAIN DEG AUTO FUNC 9/30					

Winkel zwischen r_g und MS_1 auf 90° ergänzen.
 35.264°

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$[5 \ -3 \ 9] - [3 \ 1 \ 5] \rightarrow a$ $[1 \ 1 \ -1] \rightarrow b$ $\text{dotP}(a, b)$ $\text{norm}(a) \cdot \text{norm}(b)$ $\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$ 125.264 $125.26438968276 - 90$ 35.2644					
ans(1)-90					
MAIN DEG AUTO FUNC 14/30					

Aufgabe 4b)

Wenn sich die Kugeln von aussen berühren, dann muss das neue Zentrum zu M_1 Abstand 18 haben. Also lege eine Kugel um M_1 mit $r = 18$ und schneide mit g .

$$M_2(17 \mid 9 \mid -3) \text{ oder } M_2(-3 \mid -11 \mid 17)$$

Berührungspunkte: Von M_1 aus $1/3$ des Vektors M_1M_2 anhängen.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\text{solve}((x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 18^2, t)$ $t = 16 \text{ or } t = -4$ $[x \ y \ z] t = 16$ $[x \ y \ z] t = -4$ $[3 \ 1 \ 5] + 1/3 \cdot ([17 \ 9 \ -3] - [3 \ 1 \ 5])$					
[5]+1/3*([17,9,-3]-[3,1,5])					
MAIN DEG AUTO FUNC 18/30					

$$B(23/3 \mid 11/3 \mid 7/3) \text{ oder } B(1 \mid -3 \mid 9)$$

Wenn die 2. Kugel die erste umschließt, dann ist das neue Zentrum genau ein Schnittpunkt aus Aufgabe a) weil $r_2 = 2r_1$.

$$M_2(5 \mid -3 \mid 9) \text{ oder } M_2(9 \mid 1 \mid 5)$$

Die Berührungspunkte sind $B(1 \mid 5 \mid 1)$ oder $B(-3 \mid 1 \mid 5)$

Also gibt es total 4 Lösungen.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$[x \ y \ z] t = -4$ $[3 \ 1 \ 5] + 1/3 \cdot ([17 \ 9 \ -3] - [3 \ 1 \ 5])$ $[3 \ 1 \ 5] + 1/3 \cdot ([-3 \ -11 \ 17] - [3 \ 1 \ 5])$ $2 \cdot [3 \ 1 \ 5] - [5 \ -3 \ 9]$ $2 \cdot [3 \ 1 \ 5] - [9 \ 1 \ 5]$					
2*[3,1,5]-[9,1,5]					
MAIN DEG AUTO FUNC 24/30					

Aufgabe 4c)

Die Vektoren MP und MQ haben Länge 6, also liegen P und Q auf der Kugel.

Kreisbogenlänge von P nach Q mit Kreiszentrum M_1 .

Also berechne den Winkel zwischen M_1P und M_1Q .

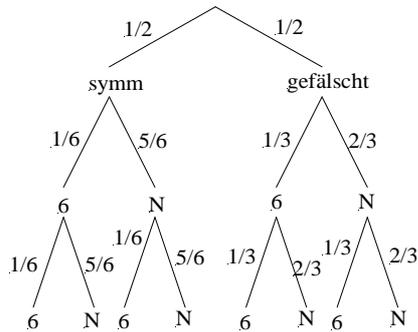
Winkel 116.39°

Bogenlänge 12.188 Einheiten.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\text{norm}([5 \ 5 \ 9] - [3 \ 1 \ 5])$ $\text{norm}([7 \ -1 \ 1] - [3 \ 1 \ 5])$ $[5 \ 5 \ 9] - [3 \ 1 \ 5] \rightarrow a$ $[7 \ -1 \ 1] - [3 \ 1 \ 5] \rightarrow b$ $\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(a, b)}{36}\right)$ $2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 116.38779996124$ 360					
2*pi*6*116.38779996124/360					
MAIN DEG AUTO FUNC 27/30					

Aufgabe 5a)

Speichere für alle Aufgaben die Gewinn-Variable als g.
Strategie a): Der Baum sieht so aus:



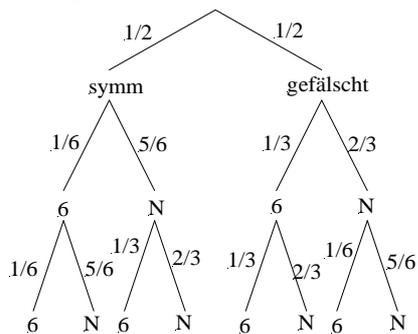
Daraus ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für zwei Sechser (Pfade 1 und 5 von links), für keinen Sechser (Pfade 4 und 8) sowie für genau einen Sechser (Komplement zu 1) Das gibt einen Erwartungswert von $2/9 = 0.2222$ Franken

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
4 3 -2) ÷ g (4 3 -2)
1/2 · (1/6)² + 1/2 · (1/3)² 5/72
1/2 · (5/6)² + 1/2 · (2/3)² 41/72
1 - 5/72 - 41/72 13/36
(5/72 13/36 41/72) ÷ p1 (5/72 13/36 41/72)
dotP(g, p1) 2/9
dotP(g, p1)
MAIN DEG AUTO FUNC 6/30
    
```

Aufgabe 5b)

Strategie b). Jetzt sieht der Baum so aus:



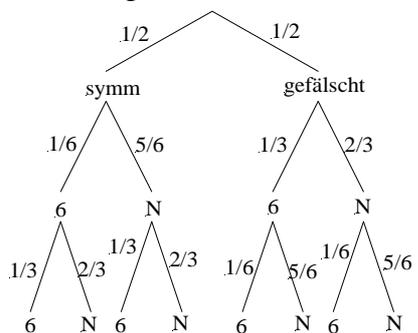
Das gibt einen Erwartungswert von $7/24 = 0.2917$ Franken
Somit ist Strategie b) klar besser als Strategie a)

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
(5/72 13/36 41/72) ÷ p1 (5/72 13/36 41/72)
dotP(g, p1) 2/9
1/2 · 5/6 · 2/3 + 1/2 · 2/3 · 5/6 5/9
1 - 5/72 - 5/9 3/8
(5/72 3/8 5/9) ÷ p2 (5/72 3/8 5/9)
dotP(g, p2) 7/24
dotP(g, p2)
MAIN DEG AUTO FUNC 10/30
    
```

Aufgabe 5c)

Für Strategie c) hat der Baum folgende Gestalt:



Das gibt einen Erwartungswert von $5/18 = 0.2778$ Franken
Strategie c) ist zwar besser als a), aber schlechter als b).
Somit ist b) die beste Strategie.

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
(5/72 3/8 5/9)
dotP(g, p2) 7/24
1/2 · 1/6 · 1/3 · 2 1/18
1/2 · 5/6 · 2/3 · 2 5/9
1 - 1/18 - 5/9 7/18
(1/18 7/18 5/9) ÷ p3 (1/18 7/18 5/9)
dotP(g, p3) 5/18
dotP(g, p3)
MAIN DEG AUTO FUNC 15/30
    
```

Aufgabe 5, Abschluss)

Damit ist gezeigt, dass b) die beste Strategie darstellt.

Aufgabe 6a)

$q = 50/51$
 einsetzen in die Formel s_n einer GF.
 $n = 164.05$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$50/51 \rightarrow q$					50/51
$2500 = \frac{51 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$					
$2500 = 2601 \cdot (1/51)^n \cdot (51^n - 50^n)$					
$\text{solve}(2500 = 2601 \cdot (1/51)^n \cdot (51^n - 50^n), n)$					$n = 164.045$
$2601 * (1/51)^n * (51^n - 50^n), n$					

Aufrunden, da die Summe überschritten werden muss
 $n = 165$ Summanden
 Summe 2501.89

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\text{solve}(2500 = 2601 \cdot (1/51)^n \cdot (51^n - 50^n), n)$					$n = 164.045$
$\frac{51 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} n = 165$					2501.89
$\frac{51 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} n = 164$					2499.91
$51 * (1 - q^n) / (1 - q) n = 164$					

Aufgabe 6b)

3-fache gleichzeitige Binomialverteilung
 $p = 1.8024\%$

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$nCr(5, 3) \cdot (1/2)^5$					5/16
$nCr(6, 2) \cdot (1/2)^6$					15/64
$nCr(9, 4) \cdot (1/2)^9$					63/256
$nCr(5, 3) \cdot (1/2)^5 \cdot nCr(6, 2) \cdot (1/2)^6 \cdot nCr(9, 4) \cdot (1/2)^9$					4725/262144
$2 * (1/2)^6 * nCr(9, 4) * (1/2)^9$					

Aufgabe 6c)

Hypothesentest
 $n = 600, p = 0.2$ (das ist H_0)
 $\mu = 120, \sigma = 9.798$
 $z = -1.531$ ist betragsmässig kleiner als 1.645.
 $\Phi(-1.531) = 6.29\%$ ist grösser als 5%.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$600 \cdot .2$					120.
$600 \cdot .2 \cdot .8$					9.79796
$\frac{105 - 120}{9.7979589711327}$					-1.53093
$\text{phi}(-1.5309310892395)$.062893
$\text{phi}(-1.5309310892395)$					

Also ist das Glücksrad in Ordnung; H_0 beibehalten
 Ein Verdacht, dass die Angabe des Veranstalters nicht stimmt, ist unberechtigt.

Die Aufgabe kann auch mit Binomialverteilung exakt gelöst werden. Dann wird $s = 6.77\%$ (siehe Output)

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$600 \cdot .2 \cdot .8$					9.79796
$\frac{105 - 120}{9.7979589711327}$					-1.53093
$\text{phi}(-1.5309310892395)$.062893
$\sum_{x=0}^{105} [nCr(600, x) \cdot (.2)^x \cdot (.8)^{600-x}]$.067713
$0.2^x * 0.8^{(600-x)}, x, 0, 105$					

Aufgabe 6d)

Rechne einzeln für "keinen Vokal", "genau einen" resp. "zwei Vokale".

Verteile zuerst die "T". $nCr(7,2)$ Mögl., 2 Plätze von 7
 Dann die Konsonanten. 19 Möglichkeiten, 5, 4 oder 3 mal mit Wiederholung.

Dann die Vokale. 6 Möglichkeiten, 0, 1 oder 2 mal mit Wh.
 Die Vokale sind noch auf die Positionen zu verteilen.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$nCr(7, 2) \cdot 19^5$					51998079
$nCr(7, 2) \cdot 19^4 \cdot 6 \cdot nCr(5, 1)$					82102230
$nCr(7, 2) \cdot 19^3 \cdot 6^2 \cdot nCr(5, 2)$					51854040
$nCr(7, 2) \cdot 19^5 + nCr(7, 2) \cdot 19^4 \cdot 6 \cdot nCr(5, 1) + nCr(7, 2) \cdot 19^3 \cdot 6^2 \cdot nCr(5, 2)$					185954349
$nCr(7, 2) * 19^3 * 6^2 * nCr(5, 2)$					