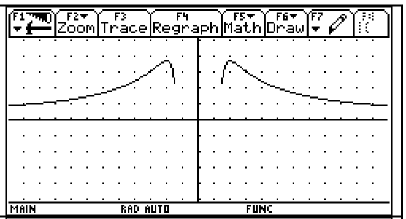
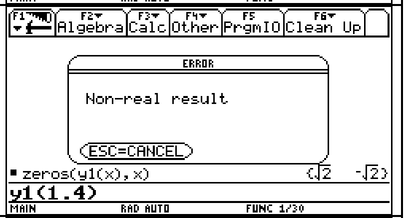
Lösung Matura 6D (2005)

Aufgabe 1a)

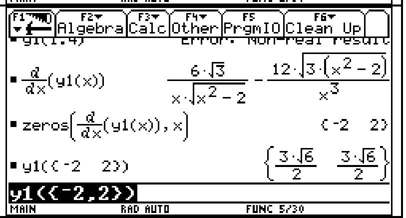
Definiere die Funktion und lasse sie grafisch anzeigen.
Man erkennt sofort:
Die Kurve ist achsensymmetrisch (gerade Fkt),
horizontale Asymptote y = 0



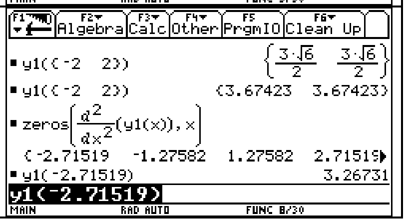
Nullstellen ($\pm\sqrt{2}$ | 0)
dazwischen ist f(x) nicht definiert.
Also D = R \ ] $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ [
und es gibt somit keine Polstellen, weil es keine einzelnen Definitionslücken gibt.



y' = ... (siehe rechts)
Maxima (2 | 3.674) sowie (–2 | 3.674)

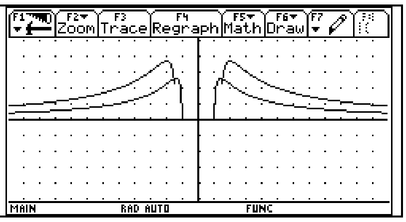


Wendepunkte (2.715 | 3.267) und (–2.715 | 3.267)
Die anderen Werte für die Lösung der Gleichung y" = 0 liegen nicht im Definitionsbereich.



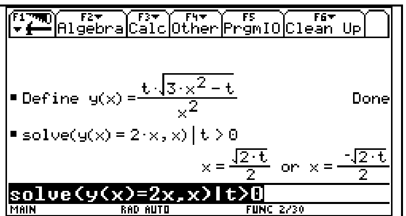
Aufgabe 1b)

Definiere y2(x) = f_3(x)
Lasse die beiden Kurven anzeigen.
Beide Kurven gehen jeweils bis auf die x-Achse herunter.

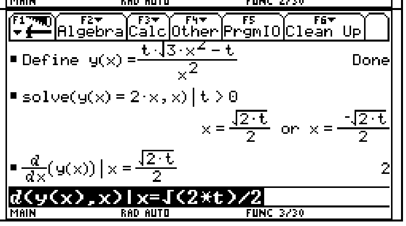


Aufgabe 1c)

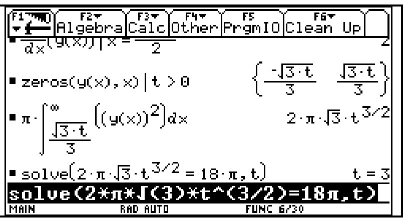
Definiere y(x) neu (allgemein)
und schneide: y(x) = 2x
Das gibt die x-Werte der Schnittpunkte.
Für die weitere Betrachtung kommt nur der positive Wert von x in Frage



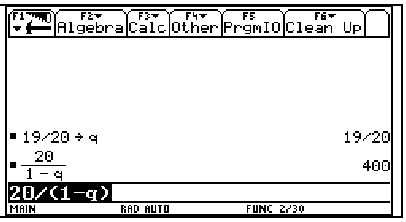
Wir zeigen, dass die y'(x) an dieser Stelle = 2 ist, somit berührt die Gerade y = 2x die Kurve, und zwar unabhängig vom Wert von t.



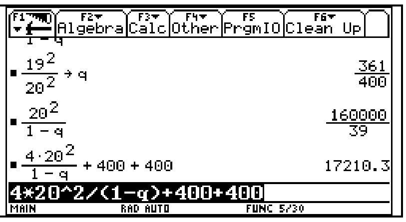
Aufgabe 1d)

Uneigentliches Integral fürs Volumen des Rotationskörpers: Bestimme zuerst die Nullstellen (in Abhängigkeit von t) Löse dann das Integral und setze es gleich 18π. Das gibt sofort t = 3	

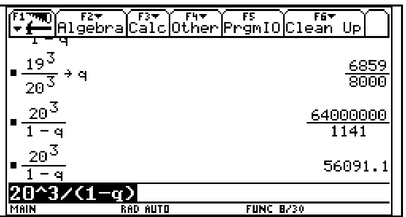
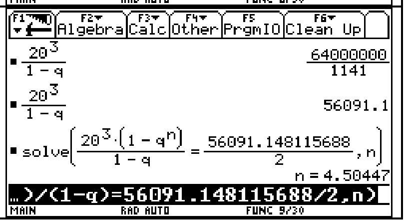
Aufgabe 2a)

Die GR hat $a_1 = 20$ und $q = 19/20$ Das gibt genau 4 Meter Höhe	

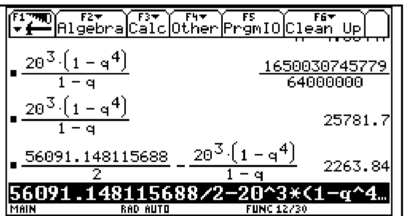
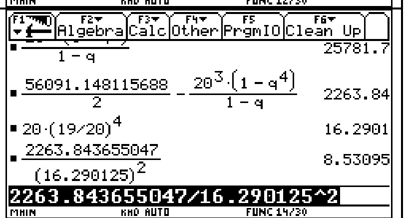
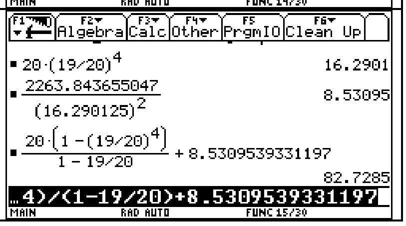
Aufgabe 2b)

Die Oberfläche setzt sich zusammen aus - dem Boden (400 cm^2), - allen Deckelflächen (400 cm^2), - 4 GR mit neuem q = 361/400 für die Seitenflächen. Oberfläche insgesamt: 17210.3 cm^2.	

Aufgabe 2c)

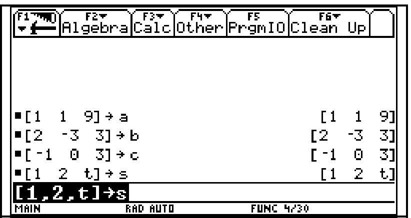
Jetzt bestimmen wir zuerst das Gesamtvolumen. Das ist eine GR mit neuem q = 19^3 / 20^3. Gesamtvolumen: 56091.1 cm^3.	
Dann lautet die Frage: wie viele Würfelvolumen müssen wir summieren, um das halbe Volumen zu erhalten? Also abbrechende GR. n = 4.504, d.h. der 5. Würfel wird entzweigeschnitten (und zwar ziemlich genau in halber Höhe)	

Aufgabe 2d)

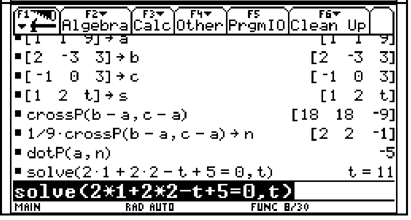
Jetzt berechnen wir das Volumen der ersten 4 Würfel und subtrahieren das von der Hälfte des Gesamtvolumens. 2263.84 cm^3 ist der Teil vom 5. Würfel, der in der unteren Hälfte verbleibt.	
Dann benötigen wir noch die Kante des 5. Würfels: 16.29 cm. Die Grundfläche dieses Würfels ist 16.29^2. Somit wird der 5. Würfel in Höhe h = 8.53 cm entzweigeschnitten. (wegen V = G h)	
Für die Schnitthöhe addieren wir die ersten 4 Kanten und dazu die oben erhaltenen 8.53 cm. Schnitthöhe 82.73 cm.	

Aufgabe 3a)

Speichere zuerst alle Punkte

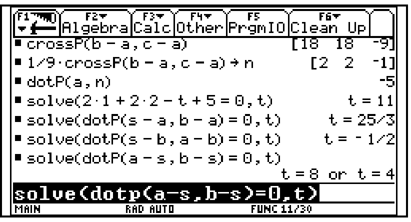


Koordinatengleichung: 2x + 2y – z + 5 = 0
Der gekürzte Normalenvektor wird auch noch gespeichert.
Wenn man S in die Koordinatengleichung einsetzt, erhält man sofort t = 11.



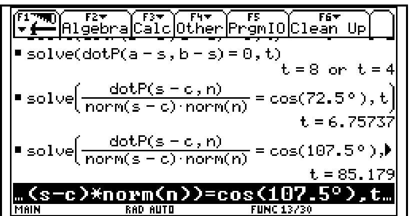
Aufgabe 3b)

Betrachte die Vektoren AB, AS, BS.
Wenn zwei davon senkrecht stehen (Skalarprodukt = 0), dann ist das Dreieck rechtwinklig. Jeweils auflösen nach t.
t = 25/3 oder t = –1/2 oder t = 4 oder t = 8.

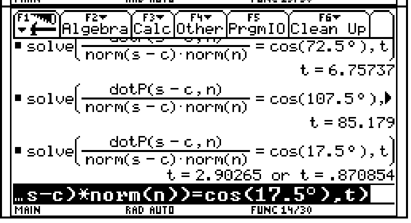


Aufgabe 3c)

Der Winkel zwischen CS und dem Normalenvektor der Ebene muss 72.5° oder 102.5° betragen.
Einsetzen in die Gleichung cos(72.5°) = ...
ergibt t = 6.757 oder t = 85.179
(Es ist nur eine Lösung verlangt.)

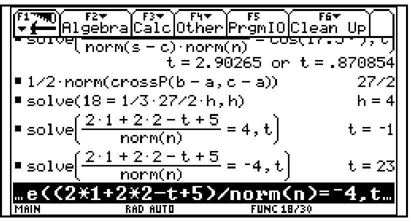


Wer vergisst, auf 90° zu ergänzen, hat die falschen Werte.
(siehe unterste Linie)



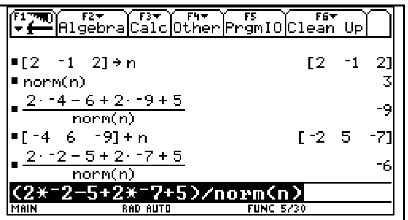
Aufgabe 3d)

Die Pyramidengrundfläche ist das Dreieck ABC und hat Fläche 27/2.
Daraus kann man die Pyramidenhöhe rechnen. h = 4.
Also muss S von der Ebene Abstand 4 haben.
In die HNF einsetzen ergibt t = –1 oder t = 23



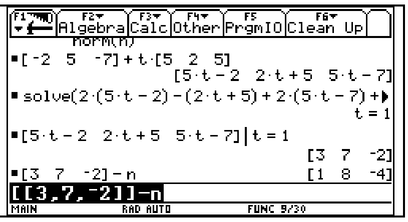
Aufgabe 4a)

Bestimme die HNF der Ebene: $(2x - y + 2z + 5)/3$
Abstand von A: 9 aber A liegt auf der negativen Seite
In der Figur zeigt der Normalenvektor n also nach unten.
Also muss P(–2 | 5 | –7) sein.
Kontrolle mit HNF. Der Abstand ist 6.
(Man kann auch das Lot von A auf ε mit k_1 schneiden.)



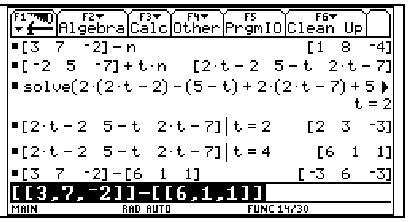
Aufgabe 4b)

Bestimme die Gerade durch P mit Richtung v.
Schnittpunkt R(3 | 7 | –2)
Punkt N minus Normalenvektor n ergibt N(1 | 8 | –4)



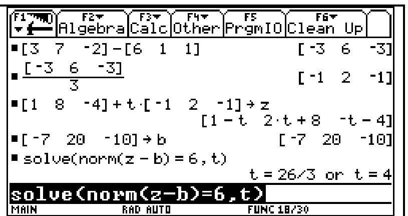
Aufgabe 4c)

Spiegle P an der Ebene: Der gespiegelte Punkt sei Q.
Dann ist r = QR
Man hat L(2 | 3 | –3), Q(6 | 1 | 1)
$r = [-3, 6, -3]^T$. Diesen Vektor kann man kürzen zu
$r = [-1, 2, -1]^T$.

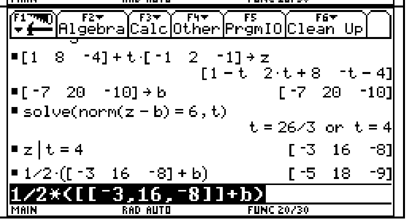


Aufgabe 4d)

Wenn die Kugeln aufeinandertreffen sollen, dann muss der Abstand der Zentren = 6 sein. Also drücke das Zentrum der einen Kugel aus mit einer Geraden.
Für t = 4 treffen die Kugeln aufeinander.

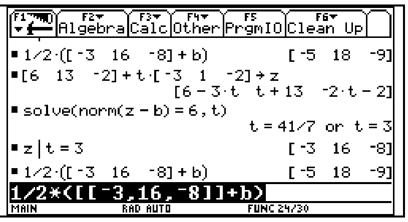


Das Zentrum im Moment der Aufpralls ist (–3 | 16 | –8).
Der Berührpunkt ist der Mittelpunkt zwischen diesem Punkt und B.
Gesuchter Berührpunkt (–5 | 18 | –9).



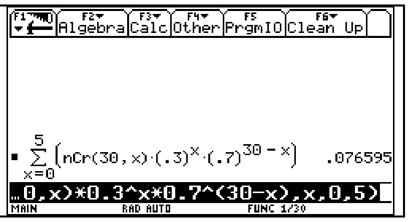
Aufgabe 4d) mit den Ersatzwerten

Die Gerade von N aus mit Richtung r hat jetzt eine andere Form. Dass der Abstand der Zentren = 6 werden muss, bleibt.
Man erhält t = 3 und das gibt dann die gleichen Ergebnisse wie oben.
Zentrum (–3 | 16 | –8). Berührpunkt (–5 | 18 | –9).



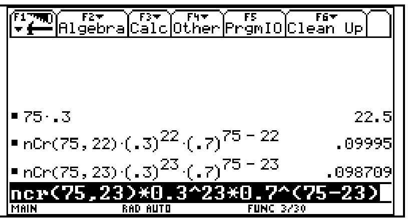
Aufgabe 5a)

Einsetzen in die Formel für die Binomialverteilung
7.66%



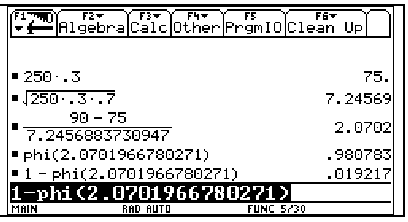
Aufgabe 5b)

$E(X) = np = 22.5$
Also testet man für 22 oder 23 "Kopf"
22 "Kopf" ist am wahrscheinlichsten.



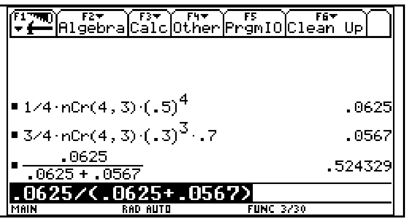
Aufgabe 5c)

Normalverteilung. H_0: $p = 0.3$, H_1: $p > 0.3$, weil 90 "Kopf" eindeutig zu viel sind.
Man erhält $\mu = 75$, $\sigma = 7.25$, $z = 2.07$ und $s = 1.9\%$
Somit ist unser Verdacht berechtigt.
Man muss H_0 verwerfen. Die Münze ist wohl eine Fälschung.



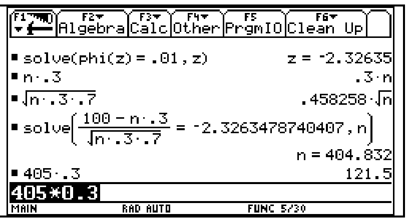
Aufgabe 5d)

Bedingte W'keit.
Der Pfad für die gefälschte Münze hat eine W'keit von 6.25%
Der Pfad für eine der drei Originale hat eine W'keit von 5.67%
$P(A \mid B) = 52.43\%$

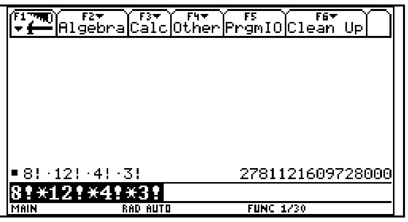


Aufgabe 5e)

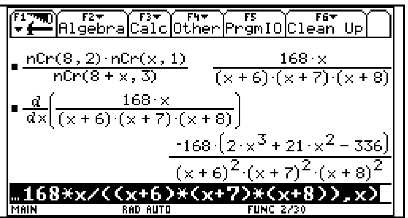
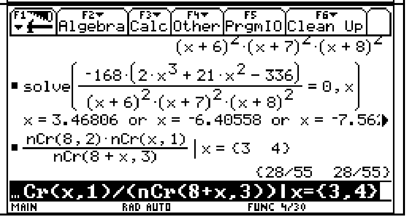
$\Phi(z)$ muss 0.01 sein. $z = -2.326$.
n ist die gesuchte Anzahl Versuche.
Drücke $\mu = 0.3n$ und σ durch n aus und löse die Gleichung für die Normalverteilung auf nach n.
Man muss mindestens 405 Mal werfen.



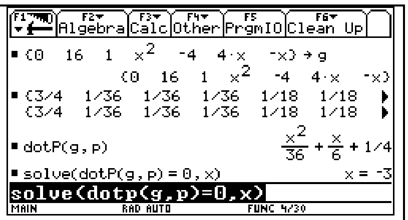
Aufgabe 6a)

8! 12! 4! 3! (3! für die "Farbgruppen")	

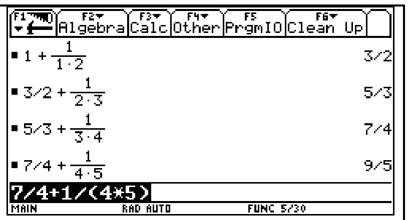
Aufgabe 6b)

Rechne günstige Fälle dividiert durch mögliche Fälle. Den Ausdruck für die Gewinn-W'keit ableiten ...	
... und = 0 setzen. Nur der Wert 3.468 ist sinnvoll. Also müssen es 3 oder 4 rote Kugeln sein. Wenn man in der Gewinn-W'keit einsetzt, sieht man, dass das Maximum 2 Mal erreicht wird, also sind beide Werte ok.	

Aufgabe 6c)

Für den Gewinn kommen 7 Werte in Frage: 16 (doppelte 4), 1 (doppelte –1) und x^2 (doppelte x) W'keit jeweils 1/36 –4 (einmal –1, einmal 4), 4x und –x, W'keit jeweils 2/36 0 für alle anderen Fälle. Berechne E(X) und setze E(X) = 0. Das ergibt x = –3.	

Aufgabe 6d)

Zuerst muss man einige Folgenglieder ausrechnen. a_2 = 3/2 = 1 + ½ = 2 – ½ a_3 = 5/3 = 1 + 2/3 = 2 – 1/3 usw. Also vermutet man a_n = (2n – 1)/n oder a_n = 1 + (n – 1)/n oder auch a_n = 2 – 1/n	
Verankerung: a_1 = 1 für alle drei Möglichkeiten ist ok. Schritt: Notiere a_{n+1} und a_n und setze alles in die rekursive Definition ein.