

Mathematik

Klasse 6D

O. Riesen

1. Kurvenbetrachtungen

Für jedes $t > 0$ ist durch $y = f_t(x) = \frac{t \cdot \sqrt{3x^2 - t}}{x^2}$ eine Kurve gegeben.

- a) Setze $t = 6$ und führe eine vollständige Kurvendiskussion durch.

D.h. diskutiere die Kurve zu $y = f_6(x) = \frac{6 \cdot \sqrt{3x^2 - 6}}{x^2}$

Verlangt werden: Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extrema, Wendepunkte (*Rechne für die Wendepunkte mit Näherungswerten!*).

- b) Skizziere die Kurven $y = f_3(x)$ und $y = f_6(x)$ in ein Koordinatensystem.
- c) Beweise, dass die Gerade $y = 2x$ alle Kurven $y = f_t(x)$ im 1. Quadranten berührt.
- d) Die im 1. Quadranten unterhalb der Kurve $y = f_t(x)$ liegende Fläche rotiert um die x-Achse. Das Volumen dieses Rotationskörpers soll $18 \cdot \pi$ betragen. Wie gross ist t?

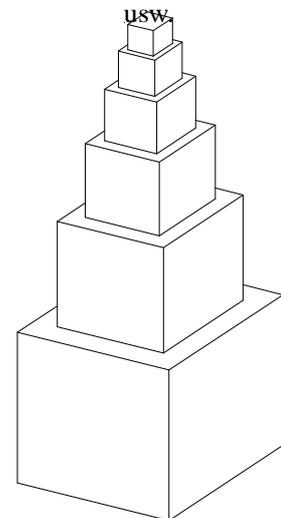
2. Würfelturm

Gegeben ist der nebenstehende, aus unendlich vielen Würfelchen zusammengesetzte Turm. Man weiss, dass die Kantenlängen der einzelnen Würfel eine GF bilden. Der unterste Würfel hat 20 cm Kantenlänge; die Kantenlänge des zweiten Würfels beträgt 19 cm.

- a) Wie hoch wird der Turm?
- b) Berechne die räumlich sichtbare Oberfläche des Turms. Der Boden (des untersten Würfels) gehört auch zur räumlich sichtbaren Oberfläche.

Der Turm soll nun durch einen Schnitt parallel zur Bodenfläche in zwei volumengleiche Teile zerschnitten werden.

- c) Welcher Würfel muss entzweigeschnitten werden?
- d) Und in welcher Höhe über dem Boden erfolgt dieser Schnitt?



3. Wo liegt der Punkt S? (Thema mit Variationen)

Gegeben ist die Ebene ε durch die Punkte $A(1 \mid 1 \mid 9)$, $B(2 \mid -3 \mid 3)$ und $C(-1 \mid 0 \mid 3)$.

Weiter kennt man den Punkt $S(1 \mid 2 \mid t)$ mit unbekannter z-Koordinate.

- a) Bestimme die Koordinatengleichung von ε . Wo liegt der Punkt S (d.h. wie gross ist t), damit S auch in ε liegt?
- b) Das Dreieck ABS soll rechtwinklig sein. Wo liegt S? (Bestimme alle 4 Lösungen!)
- c) Der Winkel zwischen der Geraden CS und ε soll 17.5° betragen. Wo liegt S?
- d) Die Pyramide mit Grundfläche ABC und Spitze S soll ein Volumen von 18 erhalten. Wo liegt S?

4. Harry Potters räumliches Billard (Vektorgeometrie)

(Siehe dazu rechts die Figur als Hilfe)

Gegeben sind zwei Bälle als gleich grosse Kugeln mit Radius $r = 3$.

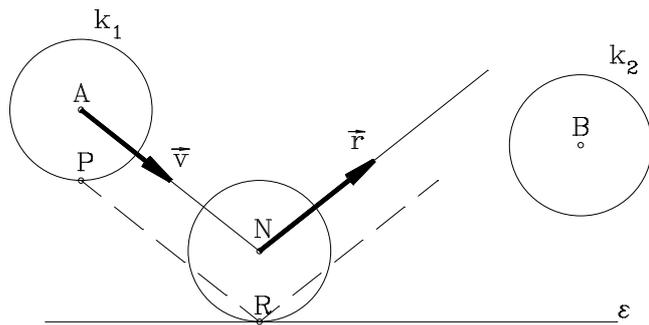
k_1 hat das Zentrum $A(-4 \mid 6 \mid -9)$.

k_2 hat das Zentrum $B(-7 \mid 20 \mid -10)$.

Ausserdem kennt man die Ebene

$$\varepsilon: 2x - y + 2z + 5 = 0$$

und den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.



- Bestimme die Koordinaten desjenigen Punktes P auf der Kugel k_1 , welcher am nächsten zur Ebene ε liegt.
- Die Kugel k_1 wird nun mit Richtung \vec{v} angestossen und trifft dann auf die Ebene ε auf. Bestimme die Koordinaten der Punkte N und R (im Moment, wo die verschobene Kugel die Ebene berührt). Äussere Einflüsse wie Gravitation, Windverhältnisse oder ähnliches werden *nicht* berücksichtigt.
- Bestimme die "Flugrichtung" \vec{r} der Kugel nach der Reflexion.

[An dieser Stelle gibt es *Ersatzwerte* zum Weiterrechnen: $N(6 \mid 13 \mid -2)$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.]

- Trifft die Kugel k_1 auf dem weiteren (geradlinigen) Flug die Kugel k_2 oder fliegt sie an ihr vorbei? Wenn die Kugeln aufeinandertreffen, dann bestimme den Berührungspunkt; andernfalls bestimme den kürzesten Abstand der beiden Kugeln.

5. Die Goldmünzen von König Shrek

Die Original Goldmünzen von König Shrek sind so verzaubert, dass sie mit 30%-iger Wahrscheinlichkeit "Kopf" zeigen. Daneben sind aber auch noch Fälschungen im Umlauf, welche "Kopf" mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 30% zeigen.

- Wir werfen eine Original Goldmünze von König Shrek 30 Mal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir höchstens 5 Mal "Kopf"?
- Wir werfen eine Original Goldmünze von König Shrek 75 Mal. Welche Anzahl "Kopf" ist am wahrscheinlichsten?
- Von einem dubiosen Händler erhalten wir eine Goldmünze, aber wir zweifeln, ob es sich um ein Original handelt. Dazu werfen wir die Münze 250 Mal und erhalten 90 "Kopf". Ist unser Verdacht berechtigt? ($\alpha = 5\%$)
- In einem Behälter hat es drei Original König Shrek Münzen und eine gefälschte, welche äusserlich von den Originalen nicht zu unterscheiden ist. Die gefälschte Münze ist symmetrisch, zeigt also "Kopf" mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Wir nehmen eine Münze heraus und werfen sie vier Mal. Es erscheint genau drei Mal "Kopf". Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben wir die gefälschte Münze erwischt?
- Wie oft müssen wir eine Original Goldmünze von König Shrek werfen, um mit (mindestens) 99%-iger Sicherheit mindestens 100 "Kopf" zu erhalten?

6. Kurzaufgaben aus verschiedenen Gebieten

a) **Kombinatorik:**

Ein Wirt führt auf seiner Weinkarte 8 Sorten Weisswein, 12 Sorten Rotwein und 4 Sorten Roséwein. (Alle Sorten sind verschieden.) Er stellt in einem Schaukasten in einer Reihe von jeder Sorte eine Flasche aus. Wie viele Möglichkeiten hat er, wenn die Flaschen der Weinsorten gleicher "Farbe" stets nebeneinander stehen sollen?

b) **Gewinnoptimierung:**

In einem Behälter hat man 8 weisse und eine unbekannte Anzahl roter Kugeln. Man zieht drei Kugeln mit einem Griff und gewinnt einen Preis, wenn man genau eine rote Kugel gezogen hat. Wie viele rote Kugeln muss es im Behälter haben, damit die Gewinn-Wahrscheinlichkeit maximal wird?

c) **Faires Spiel:**

Ein Würfel zeigt auf seinen Seitenflächen die Zahlen 0, 0, 0, 4, -1, x. Der Würfel wird zwei Mal geworfen und das *Produkt* der gewürfelten Zahlen ist der Gewinn. Für welchen Wert von x wird das Spiel fair?

d) **Vollständige Induktion:**

Eine Folge ist gegeben durch $a_1 = 1$ sowie $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$.

Finde eine explizite Definition und beweise sie mit vollständiger Induktion.
