Lineare Gleichung und Funktion

1. Gleichungen (Repetition)

1.1. Lineare Gleichungen

1. **Beispiele**
   Löse die Gleichungen

   a) $3x - 2(x - 7) = 4x - 8$
   b) $(x - 4)^2 = (x + 3) \cdot (x - 5)$

2. **Regeln**
   Beim Lösen von Gleichungen darf man beliebige Termumformungen (auf einer oder auch auf beiden Seiten der Gleichung) durchführen.
   Man darf auf beiden Seiten einer Gleichung denselben Term (Ausdruck) addieren oder subtrahieren.
   Man darf beide Seiten einer Gleichung mit demselben Term (ungleich Null) multiplizieren oder dividieren.

3. **Beispiele**
   a) $(x + 4) \cdot (2x - 5) = 0$
   b) $x^2 + 36 = 15x$

4. **Regeln**

   Ein Produkt ist dann gleich Null, wenn (mindestens) einer seiner Faktoren Null ist. Wenn in einer Gleichung die x^2 (oder höhere Potenzen) nicht wegfallen, dann nimmt man alles auf eine Seite der Gleichung, faktorisiert den Ausdruck und setzt faktorweise gleich Null.

5. **Beispiele**

   a) $(x+3)\cdot(x-4)-x^2+x=0$

   b) $4x-12=4(x-3)$

   c) $(x-6)\cdot(x+6)=(x-3)\cdot(x+12)$

6. **Sonderfälle**

   Entsteht aus einer Gleichung nach Äquivalenzumformungen eine immer falsche Aussage, dann ist die Gleichung unerfüllbar. Dann ist $\mathbb{L}=\{\}$.
   Entsteht aus einer Gleichung nach Äquivalenzumformungen eine immer richtige Aussage, dann ist die Gleichung allgemeingültig. Dann ist $\mathbb{L}=\mathbb{G}$ oder $\mathbb{L}=\mathbb{D}$, d.h. normalerweise $\mathbb{L}=\mathbb{R}$.
   Ein Sonderfall tritt nur dann auf, wenn die x wegfallen. Das letzte Beispiel oben ist *kein* Sonderfall.

Übungen

Bestimme die Lösungsmenge

a) $(2x-7)\cdot(x-3)-(2x+1)\cdot(x+4)=0$

b) $(2x-7)\cdot(x-3)\cdot(2x+1)\cdot(x+4)=0$

c) $2(x+3)^2-(x+6)\cdot(x-4)=x\cdot(x+10)$

1.2. Gleichungen mit Bruchtermen

1. **Beispiele**

   a) $\dfrac{x}{x-4} = \dfrac{x+1}{x-2}$

   b) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{x-3} = \dfrac{x}{3x-9}$

2. **Regel**

   Eine Gleichung mit Bruchtermen löst man im Normalfall am günstigsten auf, indem man beide Seiten der Gleichung mit dem kgV aller Nenner multipliziert. Dazu muss man die Nenner faktorisieren.

3. **Beispiele**

   a) $\dfrac{1}{x-4} = \dfrac{1}{2x-6}$

   b) $\dfrac{3}{2x+7} = \dfrac{3}{5(x-1)}$

   c) $\dfrac{(x-3)\cdot(x+2)}{3(x-7)} = 0$

4. **Regeln**
   Man darf auf beiden Seiten der Gleichung den Kehrwert nehmen.
   Ein Bruch ist dann gleich Null, wenn der Zähler Null ist (und der Nenner nicht).

5. **Sonderfall zum Ersten**
   $$\frac{x+3}{x+4} = \frac{x+5}{x+6}$$

6. **Sonderfall zum Zweiten**
   $$\frac{1}{3} + \frac{1}{x-3} = \frac{x}{3x-9}$$

7. **Sonderfall zum Dritten**
   $$\frac{x}{2x-12} + \frac{1}{2} = \frac{3}{x-6}$$

Übungen

a) $\dfrac{x+3}{x-1} = \dfrac{x}{x-5}$

b) $\dfrac{x-1}{x-3} - \dfrac{x}{x+3} = \dfrac{5x-3}{x^2-9}$

1.3. Gleichungen mit Parametern

1. **Parameter**

   Kommen in einer Gleichung neben der Lösungsvariablen andere Variablen vor, so nennt man diese Parameter.

2. **Beispiele**

   a) $4x + 3a = 2x + 6$

   b) $2(x - a) + 4 = a \cdot (x + 1)$

   c) $2(x - t) = t \cdot (x + 1)$

3. **Regel**

   Eine Gleichung mit Parametern löst man auf, indem man ....

   ....

   ....

   ....

   ....

4. **Beispiel**

   Löse nach jeder Variablen auf: $(a+2)\cdot(b-3) = a+b-4$

5. **Sonderfälle, lineare Gleichungen**

   a) $3(x-a) = a\cdot x + 1$

   b) $4(x-t) = t\cdot(x-4)$

6. **Sonderfälle, Bruchtermgleichungen**

a) $\dfrac{t-x}{x-3} = 2t$

b) $\dfrac{4x}{x-t} = t$

c) $\dfrac{x+a}{x-3} = \dfrac{x}{x+1}$

Lernkontrolle

a) Löse nach x auf: $3(x+m) - m \cdot (x-4) = 2$

b) Löse nach jeder Variablen auf: $\dfrac{x-y}{x+3} = y+1$

c) Löse mit Sonderfällen: $\dfrac{x+5}{x-t} = \dfrac{x+3}{x}$