

3. Integrationstechniken

3.1. Partielle Integration

1. Beispiel

Berechne $\int x \cdot e^x dx = ?$

Mit den bekannten Regeln ist diese Aufgabe nicht lösbar. Weil ein Produkt nicht faktorweise differenziert werden darf, darf ein Produkt auch nicht faktorweise integriert werden.

2. Herleitung

Wir leiten eine Formel her, mit der es anschliessend möglich ist, ein Produkt zu integrieren. Die Formel heisst partielle Integration (oder selten auch Produktintegration).



3. Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

oder in äusserst kurzer Form geschrieben: $\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$

4. Musterbeispiel

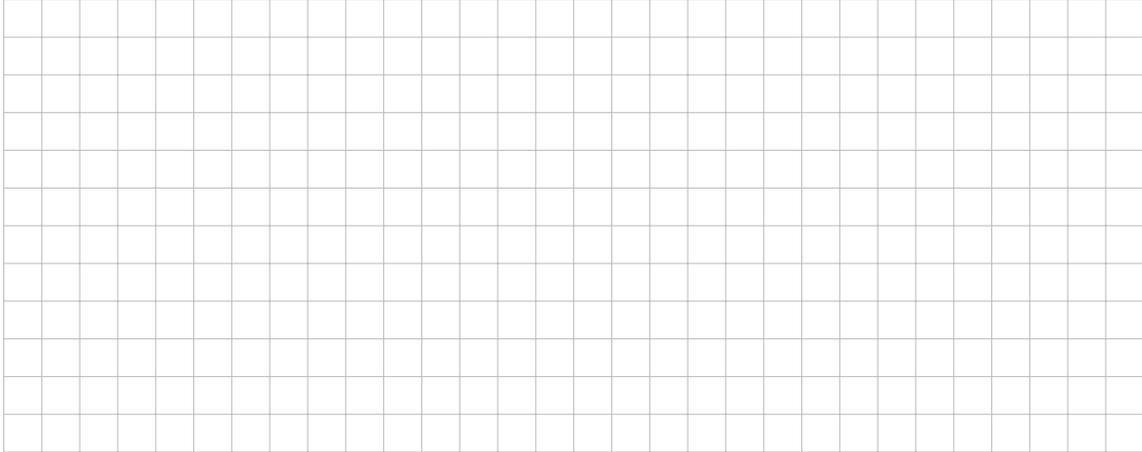
$$\int x \cdot e^x dx =$$

Ein Faktor ist nun $f'(x)$, der andere $g(x)$.



5. Übung

$$\int x \cdot \sin(x) dx =$$



6. Korrekte Wahl der Faktoren

$$\int x^2 \cdot \ln(x) dx =$$



7. Korrekte Wahl der Faktoren

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx =$$



8. **LAPTE**

Bei der Methode der partiellen Integration muss man so vorgehen, dass das neu entstehende Integral einfacher wird. Wenn man die Funktionen klassiert nach LAPTE (Logarithmen, Algebraische/Polynome/Potenzen, Trigonometrische und Exponentialfunktionen), dann muss man die im Ausdruck LAPTE weiter links liegende Funktion ableiten, die weiter rechts liegende integrieren.

9. **Die Logarithmusfunktion integrieren**

$$\int \ln(x) dx =$$

**Freiwillige Übungen für Schnellrechner**

- a) $\int x \cdot \sin(x) dx =$ (Grundsituation)
- b) $\int (2x - 3) \cdot e^x dx =$ (Grundsituation)
- c) $\int \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx =$
- d) $\int x^2 \cdot e^x dx =$

10. Bestimmtes Integral

$$\int_0^4 x \cdot e^x dx =$$



11. Übung

$$\int_1^4 \sqrt{x} \cdot \ln(x) dx =$$

**Lernkontrolle**

$$\int_1^e 4x \cdot e^x dx =$$

Die folgende Aufgabe stammt aus einer früheren Maturprüfung:

$$\int_1^8 (x - 4) \cdot \ln(x) dx =$$

12. Flächenberechnung

Die Funktionskurve zu $y = f(x) = (x - 3) \cdot e^x$ und die beiden Koordinatenachsen begrenzen ein endliches Flächenstück. Berechne dessen Inhalt.

**Übung**

Berechne die von $f(x) = (x^2 - 7x + 12) \cdot \ln(x)$ und der x -Achse umschlossene Fläche.

3.2. Integration durch Substitution

1. **Bemerkung**

Wie im vorherigen Kapitel gesehen, ist die Methode der partiellen Integration quasi die Umkehrung der Produktregel.

Die zweite Integrationstechnik, die wir behandeln - Integrieren durch Substitution - ist quasi die Umkehrung der Kettenregel.

2. **Repetition Ableiten**

Bestimme die Ableitung der Funktionen:

a) $f(x) = (x^3 + 5)^6$. Dann ist $f'(x) = \dots\dots\dots$

b) $f(x) = \sin(2x + 1)$. Dann ist $f'(x) = \dots\dots\dots$

c) $f(x) = e^{x^2+5}$. Dann ist $f'(x) = \dots\dots\dots$



3. **Integration durch Substitution**

Aus $f(u(x))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$ folgern wir: $\int f'(u(x)) \cdot u'(x) dx = f(u(x))$.

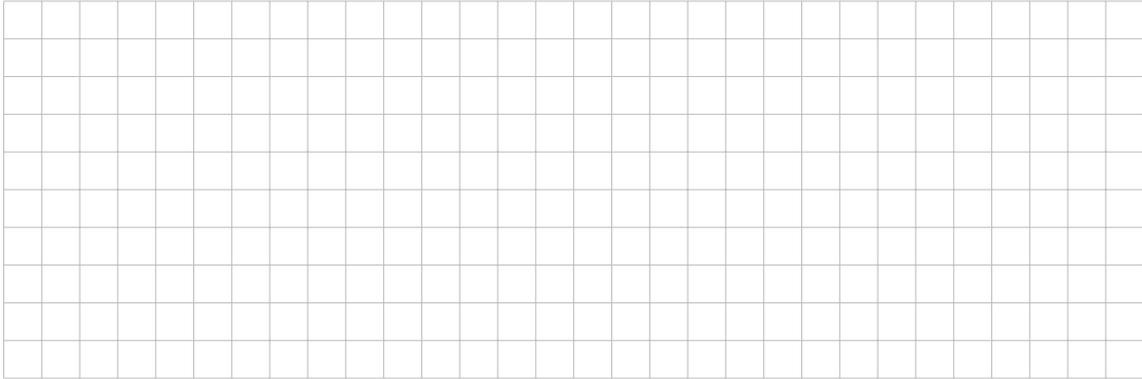
4. **Musterbeispiel I**

$\int 2x \cdot e^{x^2} dx =$

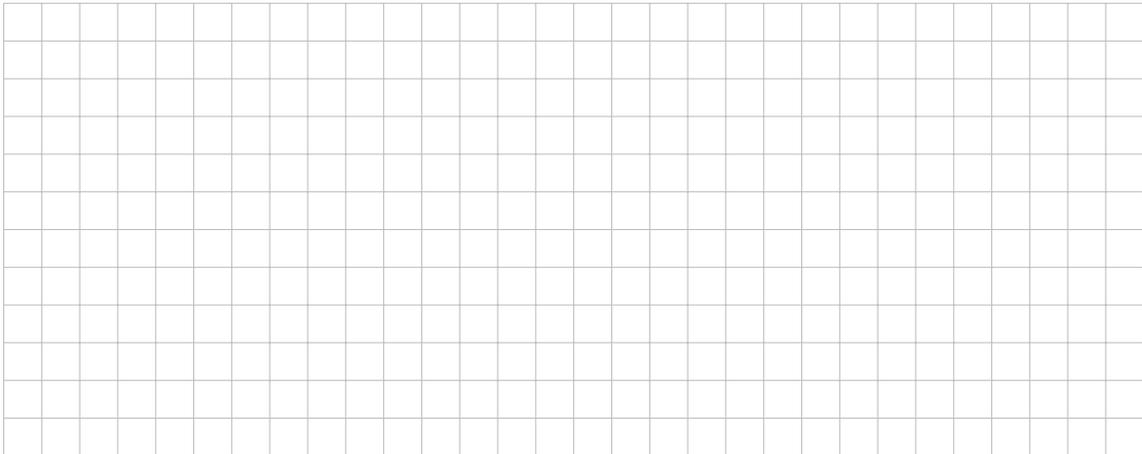


5. **Musterbeispiel II**

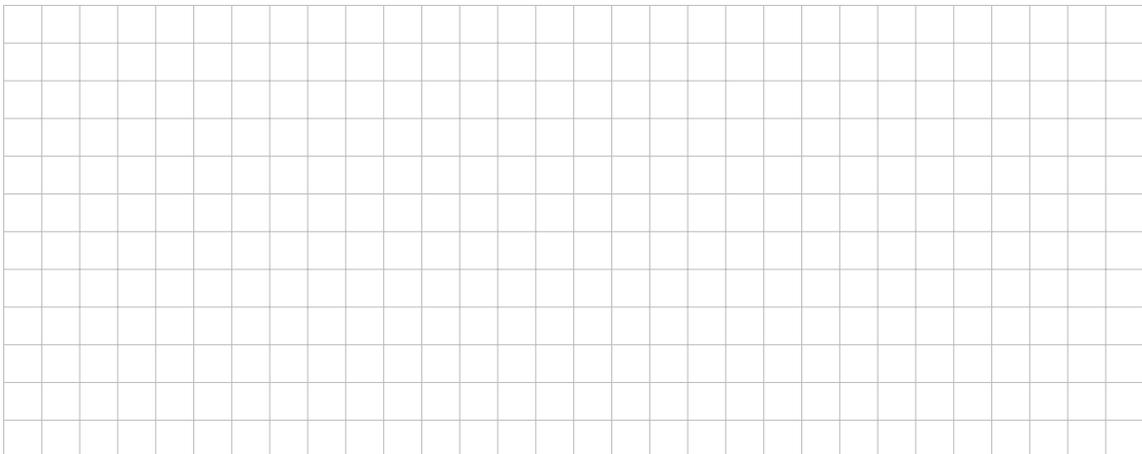
$$\int 10 \cdot \sin(5x - 3) dx =$$

6. **Musterbeispiel III**

$$\int x^2 \cdot \sqrt{x^3 + 1} dx =$$

7. **Musterbeispiel IV**

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx =$$



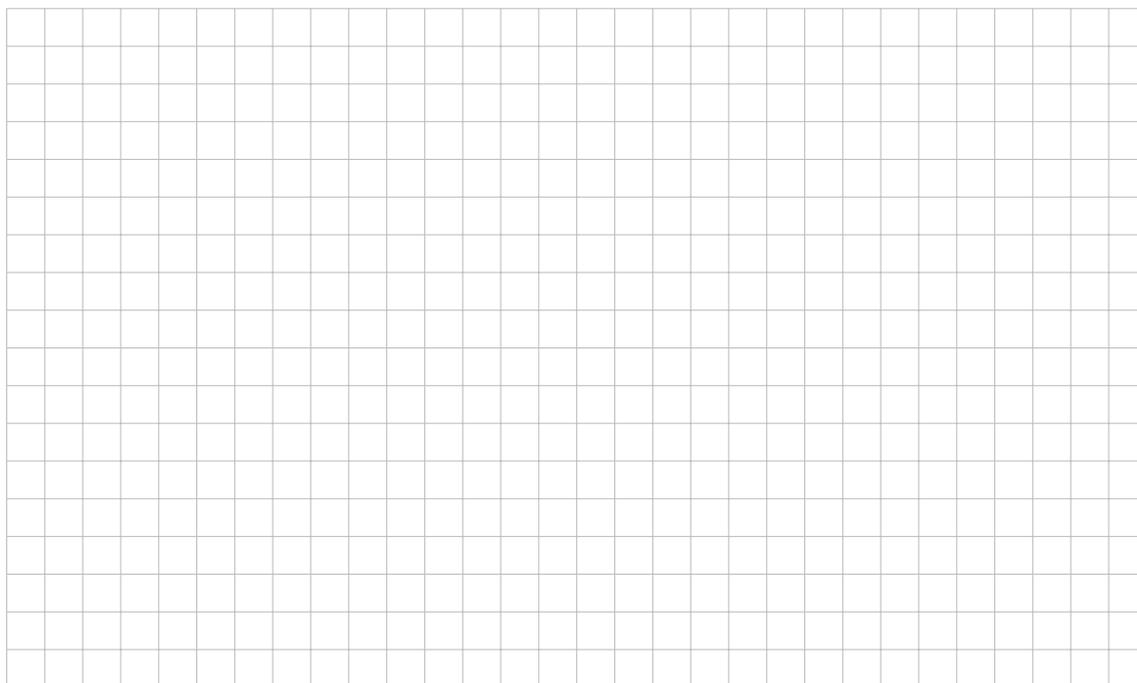
8. Technik des Integrierens

Wann erfolgt ein Integrationsvorgang mit partiellem Integrieren, wann ist die Substitutionsregel angezeigt? Das scheint manchmal nicht von vornherein klar.

Wenn eine *innere Funktion* vorkommt und man die innere Ableitung *sieht*, dann ist normalerweise die Substitution richtig; wenn man ein Produkt von zwei Faktoren hat, die man einzeln direkt integrieren bzw. ableiten kann, dann ist das Verfahren der partiellen Integration angezeigt.

9. Bestimmtes Integral

$$\int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx =$$



Lernkontrolle

$$\int_0^1 x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx =$$

10. Integrieren ist eine Kunst

Betrachte die vier auf den ersten Blick relativ ähnlich aussehenden Integrale:

$$\int 2x^2 \cdot e^x dx$$

$$\int 2 \cdot e^{x^2} dx$$

$$\int 2x \cdot e^{x^2} dx$$

$$\int 2x^3 \cdot e^{x^2} dx$$

