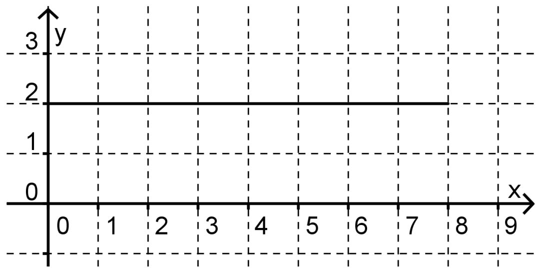
# 2. Flächenberechnungen

## 2.1. Die Flächenfunktion

1. **Weg-Zeit-Geschwindigkeit**

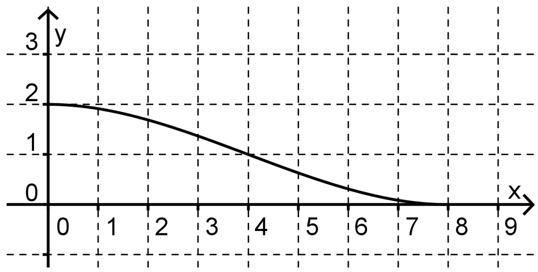
   Ein Velofahrer fährt während 8 Sekunden mit genau 2 m/s Geschwindigkeit (siehe die Grafik).
   Welche Strecke legt er dabei zurück?
   Und wo erkennt man die zurückgelegte Strecke in der Grafik?

   ....................................

2. **Bremsvorgang**

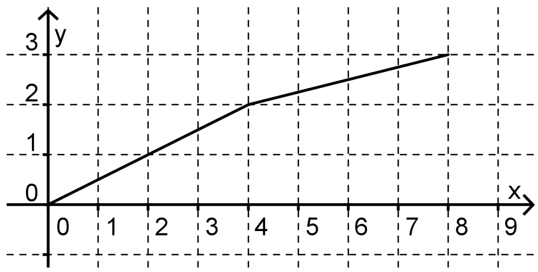
   Ein Bremsvorgang dauert 8 Sekunden. Die Grafik zeigt, wie die Geschwindigkeit von 2 m/s auf Null zurückgeht.
   Welche Strecke wurde bei diesem Bremsvorgang zurückgelegt?

   ....................................

3. **Messung**

   Die Grafik zeigt die Geschwindigkeit eines Velofahrers. Wir möchten die zurückgelegte Strecke als Funktion der Zeit $x$ ausdrücken.

   ....................................

   ....................................

4. **Flächenfunktion**

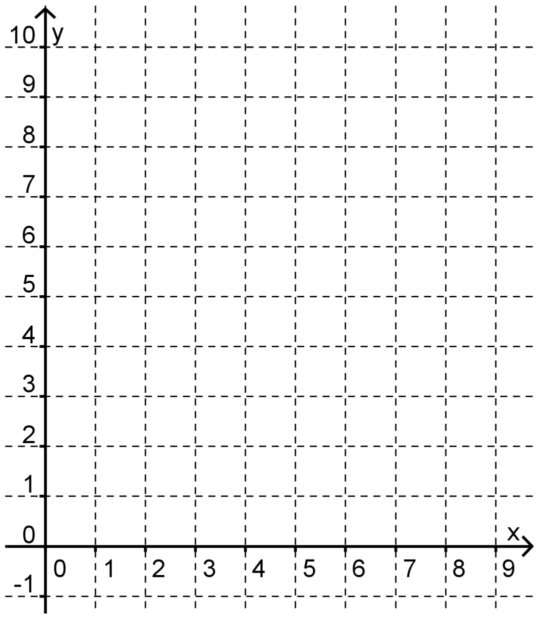
   Es ist ein Ziel dieses Kapitels, eine Funktion zu finden, die die Fläche unter einer Kurve berechnet. Solange die Kurve aus Strecken besteht, ist das mit elementargeometrischen Formeln machbar. Wenn aber die begrenzende Kurve gekrümmt ist, dann sind weitergehende Überlegungen nötig.
   Für das erste Beispiel oben ist die Flächenfunktion $F(x)$ leicht zu bestimmen:

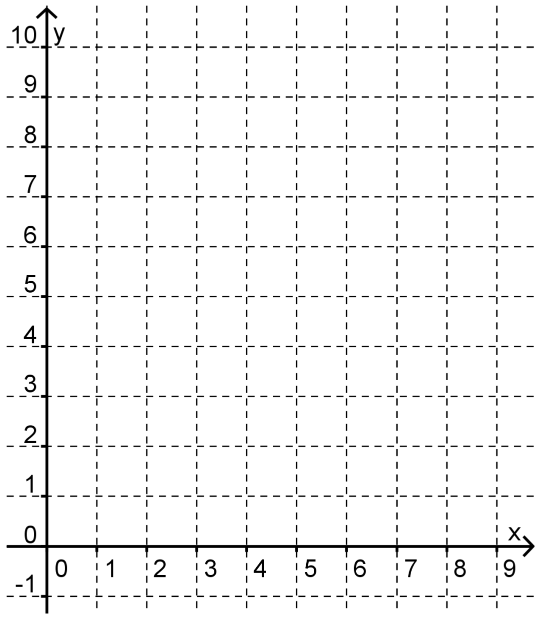
   ............................................................................

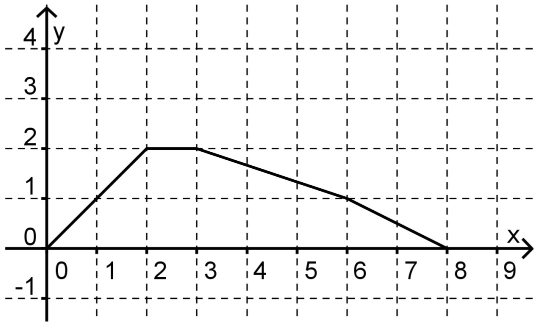
   Im zweiten Beispiel ist die Gesamtfläche nur deshalb einfach zu berechnen, weil die Kurve eine Symmetrie aufweist. Die Fläche bis zur Stelle $x = 3$ (beispielsweise) kann im Moment noch nicht berechnet werden.
   Im dritten Beispiel kann man die Flächenfunktion noch angeben: Im Bereich $0 \leq x \leq 4$ hat man, abhängig von $x$ ein Dreieck, dessen Fläche $F(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{4}$ beträgt.
   Für $4 \leq x \leq 8$ ist die Fläche 4 plus die Fläche des entsprechenden Trapezes.

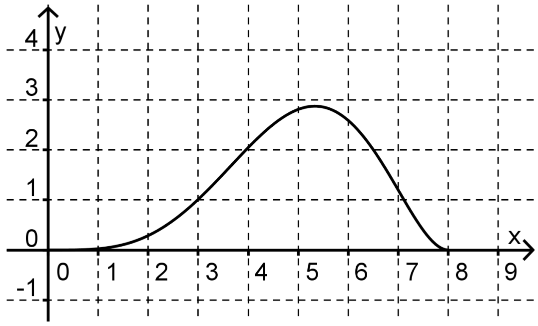
5. **Flächenfunktionen zeichnen**

Skizziere zur (im unteren Koordinatensystem) gegebenen Funktion diejenige Funktion, welche die Fläche unterhalb der Funktionskurve misst. Die Flächenfunktion gehört ins obere Koordinatensystem.



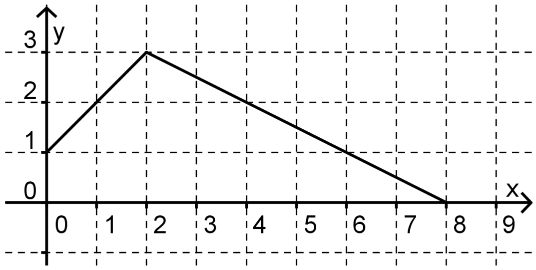

Wir stellen fest: ..........................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

**Übung**

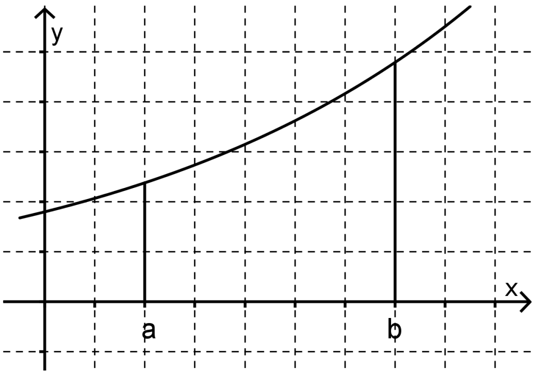
Skizziere die Flächenfunktion zu dieser Funktion:

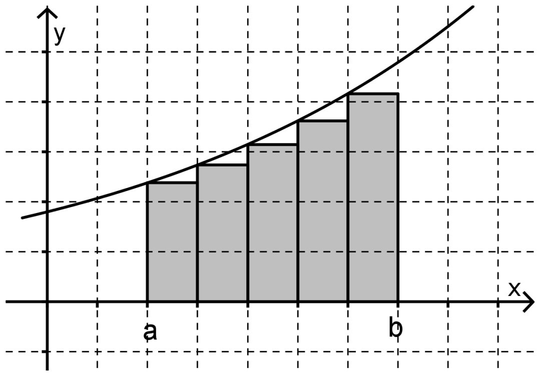


## 2.2. Historische und Theoretische Bemerkungen

1. **Fläche unter einer Kurve**

   Nun wollen wir die Fläche unter einer Kurve konkret berechnen.
   Es sei also eine Funktion $y = f(x)$ gegeben. Um Sonderfälle auszuschliessen soll sie weder Sprung- noch Knickstellen aufweisen. Um die Berechnung zu vereinfachen, soll sie im Intervall $x \in [a, b]$ oberhalb der x-Achse verlaufen.

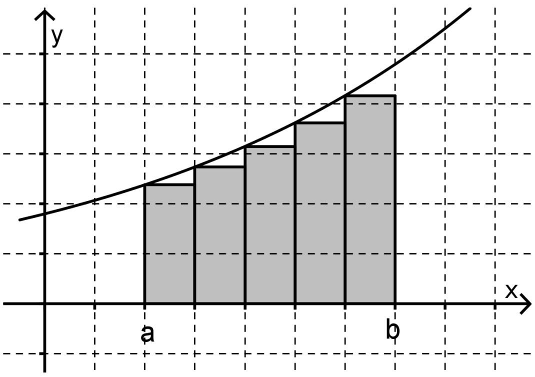


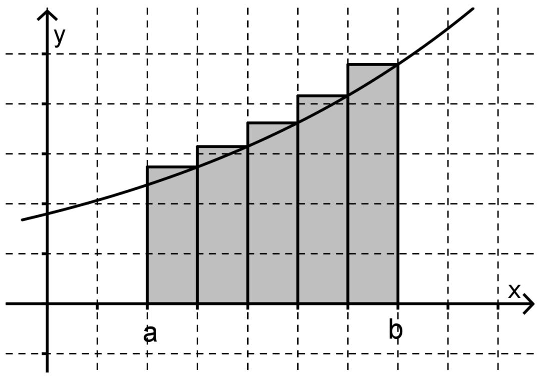




   Wie die Figur rechts zeigt, denken wir uns nun die gesuchte Fläche in viele schmale Streifen der Breite $\Delta x$ zerschnitten. Die gesuchte Fläche können wir nun eingrenzen, indem wir Rechtecke zeichnen. Je kleiner die Breite $\Delta x$ wird, umso genauer nähern wir uns mit den Rechtecken der gesuchten Fläche. Der Fehler, den wir machen, wird immer kleiner und strebt gegen Null, wenn die Rechtecke beliebig schmal werden.

2. **Unter- und Obersumme**

   Die Summe der Rechtecksflächen wird Untersumme $U(\Delta x)$ genannt. Sie ist abhängig von $\Delta x$.
   Die Breite der Rechtecke beträgt $\Delta x$, deren Höhe ist der jeweilige Funktionswert $f(x)$.
   Das führt uns zur Formel $U(\Delta x) = \sum\limits_{x=a}^{b} f(x) \cdot \Delta x$.

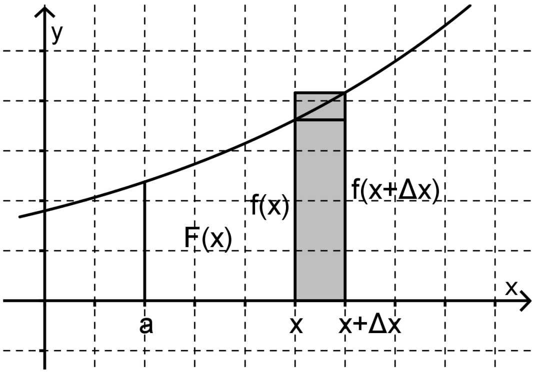


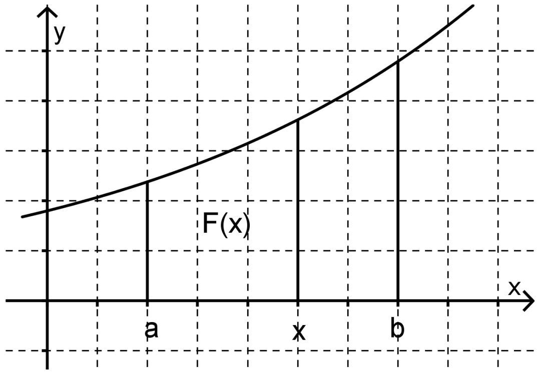




   Wie in der Figur rechts dargestellt, bildet man nun auch die Obersumme $O(\Delta x)$. Wenn $\Delta x$ gegen Null geht, dann nähern sich vernünftigerweise (für die betrachteten Funktionen stimmt das) die Obersumme und die Untersumme demselben Wert.
   Das ist dann der gesuchte Wert für die Fläche.
   Das Berechnen der Unter- und Obersummen kann je nach Funktion ziemlich schwierig werden. Deshalb müssen wir über diese Rechtecke noch mehr Informationen haben.

3. **Zunahme der Flächenfunktion**

Wir betrachten nun unsere Flächenfunktion $F(x)$. Dabei interessiert uns die Zunahme der Flächenfunktion an einer (beliebig gewählten) Stelle $x$. (Siehe die Figur links.)




Somit gilt $F'(x) = f(x)$, d.h. die Flächenfunktion ist eine Stammfunktion von $f(x)$. Also ist $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ und die letzte zu lösende Frage ist der Wert der Integrationskonstanten $c$. Dazu betrachten wir die Figur rechts.
$F(x)$ beschreibt die Fläche unter der Kurve, begrenzt durch die linke Senkrechte bei $a$, die rechte bei $x$. Somit muss $F(a) = 0$ sein. Wir folgern: $0 = F(a) + c$ und somit $c = -F(a)$. Also ist $\int f(x)\,dx = F(x) - F(a)$.
Zum Schluss nehmen wir die obere Grenze bei $x = b$ wieder auf und erhalten für unsere gesuchte Gesamtfläche $F = F(b) - F(a)$.

4. **Definition**

Wir schreiben $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ und nennen diesen Ausdruck ein **bestimmtes Integral**.
Das bestimmte Integral berechnet also die Fläche unter der Kurve, begrenzt durch die Geraden $x = a$ und $x = b$.

5. **Historisches**

Die Darstellung für die Untersumme $\sum\limits_{x=a}^{b} f(x) \cdot \Delta x$ und das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ sehen nur auf den ersten Blick ziemlich unterschiedlich aus.
Bei der Untersumme werden Rechtecksflächen aufsummiert. (Das Summenzeichen ist ein grosses griechisches Sigma, der Buchstabe S im griechischen Alphabet.) Wenn nun $\Delta x$ quasi unendlich klein wird, dann wird aus dem $\Delta x$ ein $dx$ und aus dem Ausdruck wird eine Summe von unendlich vielen unendlich schmalen Rechtecken. Dafür wurde vor etwa 300 Jahren das Integralzeichen eingeführt. Das Zeichen ist genaugenommen ein stilisiertes **S** für eine Summe.

6. **Notation**

Für die Berechnung eines bestimmten Integrals gilt die folgende Notation:

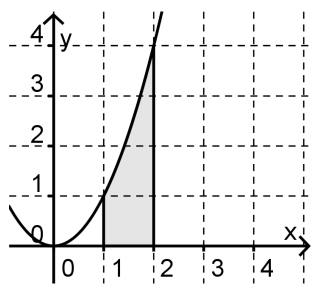
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

7. **Musterbeispiel**

In der Figur ist $f(x) = x^2$ gegeben.
Man kennt die Grenzen $a = 1$ und $b = 2$.

Dann ist $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$

Die Einheit dafür sind Flächeneinheiten oder $E^2$




8. **Zum Mitschreiben**

a) $\displaystyle\int_3^5 4x\,dx =$ b) $\displaystyle\int_2^3 3x^2\,dx =$ c) $\displaystyle\int_0^2 x^3\,dx =$

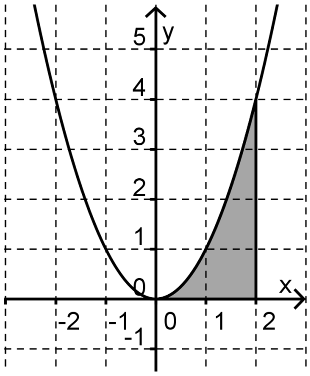
**Übung**

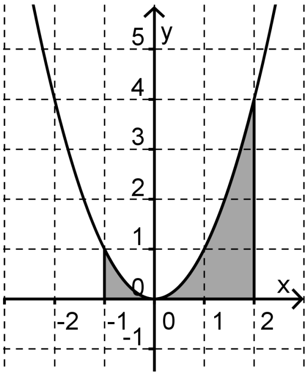
Zeige, dass $\displaystyle\int_2^4 x^2\,dx = \frac{56}{3}$ und ebenso: $\displaystyle\int_8^{10} 3x\,dx = 54$

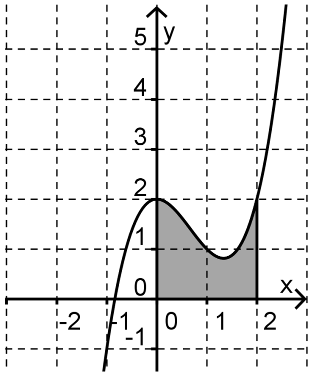
## 2.3. Flächenberechnungen, bestimmte Integrale

1. **Figuren**

   Bestimme die dargestellten Flächen. Die ersten beiden Figuren zeigen die Normparabel $y = x^2$, für die Figur rechts ist $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$.








2. **Bestimmte Integrale**

   Löse ohne Taschenrechner:

   a) $\displaystyle\int_1^3 4 \cdot \sqrt[3]{x}\, dx =$ b) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{3}{x^3} - \frac{5}{x}\right) dx =$ c) $\displaystyle\int_2^5 \frac{4 - x^2}{x}\, dx =$

3. **Diverse Funktionen und Parameter**

a) $\int_0^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^x \, dx =$ b) $\int_0^{\pi} \sin(x) \, dx =$ c) $\int_1^{t} t \cdot x^3 \, dx =$

4. **Grundaufgabe**

Berechne die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = f(x) = 6x^2 - x^3$ liegende Fläche.

5. **Grundaufgabe**

Ebenso: Wie gross ist die im I. Quadranten unterhalb der Kurve liegende Fläche?
$y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$

6. **Negative Werte**
   Bestimme die von der $x$-Achse und der Kurve $y = f(x) = x^2 - 3x - 40$ umschlossene endliche Fläche.

   Folgerung: ..........................................................................

   ..........................................................................

7. **Mehrere Teilflächen**
   Bestimme die von der $x$-Achse und der Kurve $y = f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ umschlossene endliche Fläche.

   Folgerung: ..........................................................................

   ..........................................................................

8. **Erstaunliches**
   Berechne $\int_{-1}^{2} (x^2 - 1)\, dx$ und erkläre das Ergebnis.

9. **Fläche zwischen zwei Kurven**
   Bestimme die zwischen den Kurven $y = x^2$ und $y = x + 6$ eingeschlossene Fläche.

10. **Mehr als zwei Schnittpunkte**
    Berechne die (endliche) Fläche, welche von den Kurven $y = x^3$ und $y = x^2 + 2x$ eingeschlossen wird.

Wir halten fest: ............................................................

.........................................................................

.........................................................................

.........................................................................

.........................................................................

11. **Flächenverhältnis**

In welchem Verhältnis teilt die Funktion $y = \sqrt{x}$ die im I. Quadranten unter der Geraden $y = 6 - x$ liegende Fläche?

**Übung**

Die folgende Aufgabe stammt aus einer früheren Prüfung:
Die von $y = -x^2 + x + 6$ und der $x$-Achse eingeschlossene Fläche wird durch die Gerade $y = 2 - 2x$ in zwei Teilflächen zerschnitten. Berechne das Verhältnis der beiden Teilflächen.

12. **Obere Grenze gesucht**

    Betrachte das im I. Quadranten liegende Kurvenstück von $y = \frac{1}{x}$.
    Die im I. Quadranten unterhalb der Kurve liegende Fläche wird links begrenzt durch die Gerade $x = 2$. An welcher Stelle $x = t$ muss man rechts abschneiden, wenn die Fläche Inhalt 10 haben soll?

13. **Parameter**

    Wie gross muss $a$ sein, damit die zwischen der Kurve $y = a - x^2$ und der $x$-Achse liegende Fläche Inhalt 20 hat?

**Überlegungsaufgabe**

Kann $\int_0^6 (x^2 - t)\, dx = -1$ werden?
Falls ja, wie gross muss $t$ sein, und was bedeutet das Ergebnis?

14. **Fläche zwischen der Kurve und der Kurventangente**
Die Kurve $y = x^3$ und deren Kurventangente im Punkt $(1\,|\,1)$ schliessen eine Fläche ein. Berechne den Inhalt dieser Fläche.

15. **Fläche halbieren**
Die Gerade $y = m \cdot x$ soll die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = 1 - x^2$ liegende Fläche halbieren. Wie gross ist $m$?

**Übung**
Gegeben ist $y = -x^2 + x + 6$.
Die im I.Quadranten unterhalb der Kurve liegende Fläche soll durch eine Parallele zur $y$-Achse genau halbiert werden.
Wo muss diese Parallele sein?

## 2.4. Angewandte Aufgaben

1. **Funktionsgleichung bestimmen**

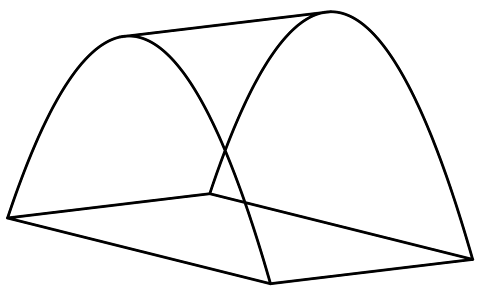
   Gesucht ist eine Parabel (Polynomfunktion 2. Grades) mit folgenden Eigenschaften:
   Die Kurve geht durch den Ursprung und hat dort Steigung 6.
   Die Kurve schliesst mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt 12 ein.

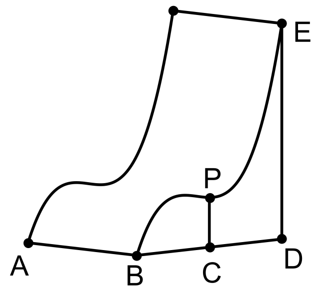
2. **Extremalwertaufgabe**

   Für welchen Wert von $a > 0$ wird die Fläche zwischen den Parabeln $y = a - \dfrac{x^2}{a}$ und $y = a^3 - a \cdot x^2$ extremal?
   Handelt es sich um ein Maximum oder ein Minimum?

3. **Festzelt**

Der Boden des dargestellten Festzelts (siehe die Skizze) ist ein Quadrat von 10 Metern Seitenlänge. Das Zelt ist 6 Meter hoch. Weiter weiss man, dass die Kurve zwischen der Frontwand und dem gekrümmten Dach eine Parabel ist.
Welches Volumen hat das Zelt?





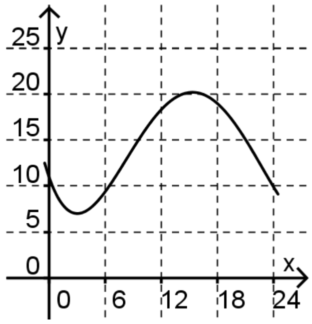

4. **Liegestuhl**

Welches Volumen hat der skizzierte Liegestuhl (siehe die Skizze rechts)?
Die Streckenlängen betragen $AB = 50\,\text{cm}$, $BC = CD = CP = 30\,\text{cm}$, $DE = 90\,\text{cm}$.
Die Kurve ist eine Polynomfunktion 3. Grades und hat in $P$ ihr lokales Minimum.

5. **Durchschnittswert**

Die skizzierte Funktion zeigt einen Temperaturverlauf während 24 Stunden. Berechne die durchschnittliche Temperatur.

$$f(x) = \frac{x^4}{1800} - \frac{31x^3}{900} + \frac{5x^2}{8} - \frac{72x}{25} + 10.9$$



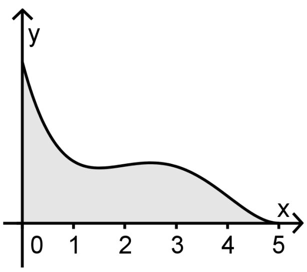

**Übung**

Die Skizze gibt die Schadstoffkonzentration in der Luft wieder, welche über eine Zeit von 5 Stunden gemessen wurde.

Wir nehmen an, die Funktionskurve habe die Gleichung

$$f(x) = \frac{x^4}{20} - \frac{3x^3}{5} + \frac{19x^2}{8} - \frac{15x}{4} + \frac{25}{8}$$

Berechne die durchschnittliche Konzentration pro Stunde.

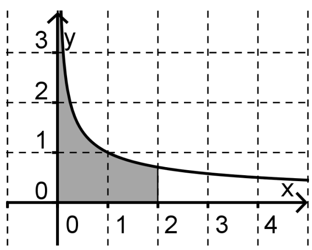


## 2.5. Uneigentliche Integrale

1. **Uneigentliche Integrale, 1. Art**
   Berechne die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = \mathrm{e}^{-x}$ liegende Fläche.

2. **Beispiel**
   Die im I. Quadranten unterhalb der Kurve $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ liegende Fläche wird links begrenzt durch die Gerade $x = 2$.
   Wie gross wird diese Fläche?

3. **Uneigentliche Integrale, 2. Art**
   Gegeben ist die Funktion $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
   Berechne die in der Skizze rechts dargestellte Fläche, welche nach oben unbegrenzt ist.



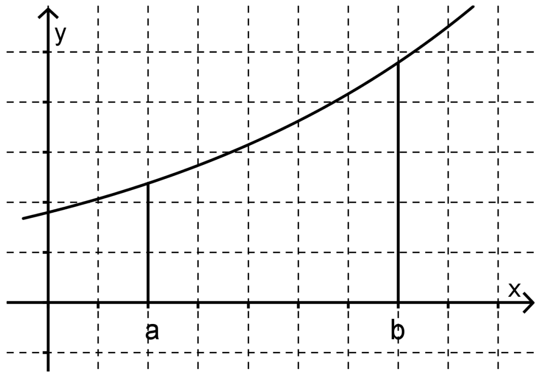

**Übung**

Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_3^\infty \frac{3}{x^3}\,dx$?

## 2.6. Volumen von Rotationskörpern

1. **Volumenberechnung**

   Eine Fläche rotiert um die $x$-Achse. Berechne das Volumen des so beschriebenen Körpers.



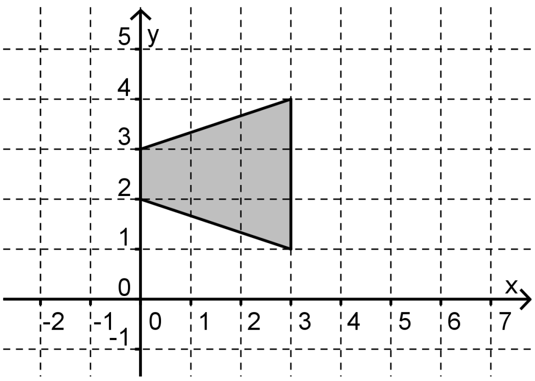

2. **Volumen des Kegels**

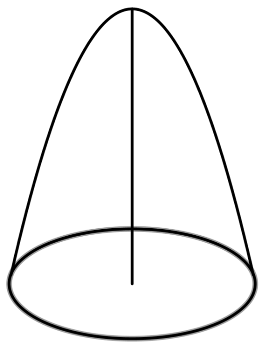
   Mit der gefundenen Formel beweisen wir die Volumenformel für den Kegel.

3. **Volumen der Kugel**

   Wir beweisen auch die Volumenformel für die Kugel.

4. **Musterbeispiel**
Das in der Skizze links dargestellte, markierte Viereck rotiert um die x-Achse. Beschreibe den entstehenden Körper und berechne sein Volumen.



5. **Rotationsparaboloid**
Die rechts dargestellte *Glocke* hat als Bodenfläche einen Kreis mit 36 cm Durchmesser, ist 25 cm hoch und entsteht, indem ein Parabelbogen um eine Achse rotiert. Berechne das Volumen dieser Glocke.

**Übung**
Die von den Kurven $y = x^2 + 1$ und $y = x + 3$ umschlossene Fläche rotiert um die $x$-Achse.
Berechne das Volumen des so beschriebenen Körpers.