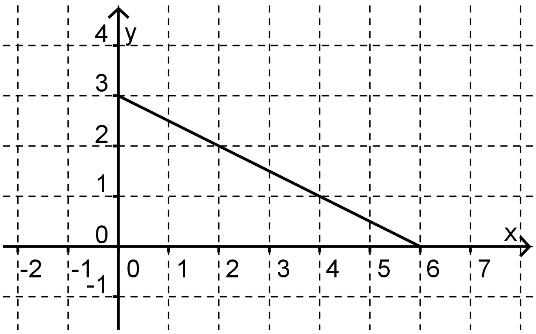
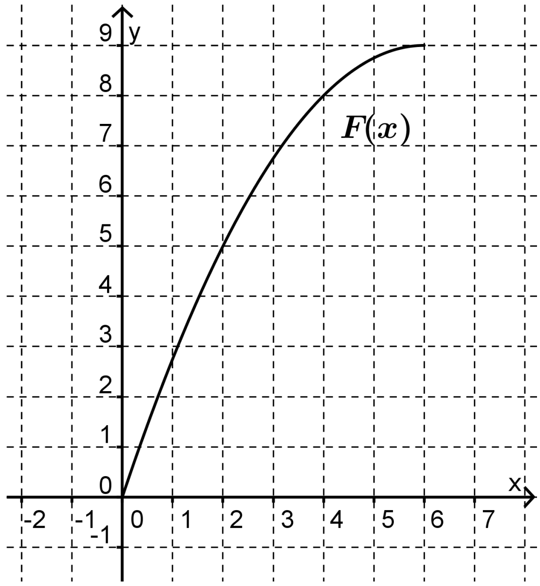
2. Flächenberechnungen

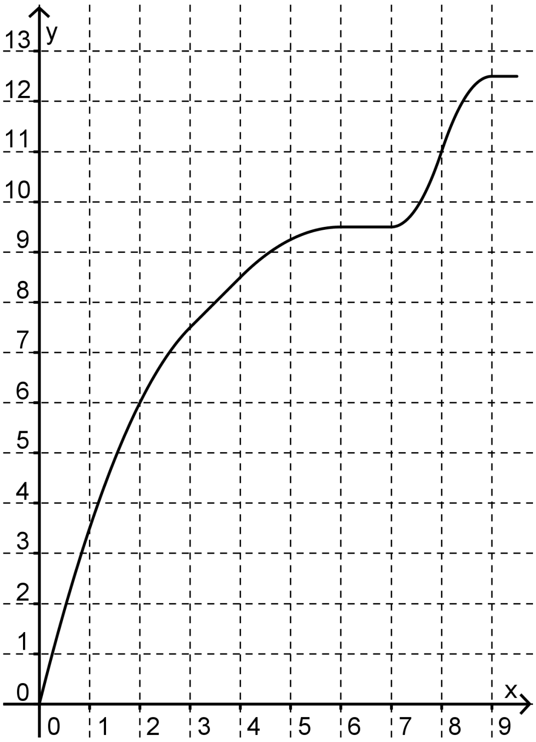
2.1. Die Flächenfunktion

1. **Flächenfunktion**





2. **Flächenfunktion**



2.2. Historische und Theoretische Bemerkungen

1. **Notationen**
   $\sum\limits_a^b f(x)\,\Delta x$ ist eine Summe von Rechtecken (Obersumme oder Untersumme),
   $\int_a^b f(x)\,dx$ ist die Summe von unendlich vielen, unendlich schmalen solchen Rechtecken und ergibt die Fläche unter der Kurve.

2.3. Bestimmte Integrale

1. **Notationen**
   a) $\int_2^5 3x^2\,dx = x^3 \Big|_2^5 = 5^3 - 2^3 = 117$

   b) $\int_1^4 5x\,dx = \frac{5}{2} \cdot x^2 \Big|_1^4 = \frac{5}{2} \cdot 4^2 - \frac{5}{2} \cdot 1^2 = 40 - \frac{5}{2} = \frac{75}{2} = 37.5$

2. **Technik des Integrierens**
   a) $\frac{1}{15} \cdot 3^{\frac{1}{3}} + \frac{17}{5}$

   b) $2 \cdot \ln(2) + 3$

3. **Flächen**
   $\int_0^2 \left(\sqrt{x} + 1\right) dx = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2} + 2$

   $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln(2) - \ln(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \ln(2)$

   $\int_{-\sqrt{3}}^1 \left(3 - x^2\right) dx = 2 \cdot \sqrt{3} + \frac{8}{3}$

4. **Interpretation**
   $\int_0^9 \left(2 - \sqrt{x}\right) dx = 0$
   Man hat zwei gleich grosse Flächen, je eine oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse.

5. **Fläche zwischen zwei Kurven**
   a) $12 - 5 \cdot \ln(5) = 3.953$

   b) $\frac{937}{12}$

6. **Flächenverhältnis**
   11:16
   Hinweis: Die Gesamtfläche ist 18, die obere Teilfläche $\frac{22}{3}$, die untere $\frac{32}{3}$.

7. **Flächenberechnung (Aus einer Prüfung)**
   a) $\dfrac{71}{6}$
   b) $47 : 88$

8. **Parameter gesucht**
   $a = \pm 2.632$

9. **Parameter gesucht**
   $t = \dfrac{\sqrt{6} - 2}{2}$
   Hinweise: $F = \dfrac{t^3}{6}$, $F_1 = \dfrac{t^3}{6 \cdot (t+1)^2}$, $F_2 = \dfrac{t^4 \cdot (t+2)}{6 \cdot (t+1)^2}$.
   Löse $F_1 : F_2 = \dfrac{1}{t \cdot (t+2)} = \dfrac{1}{2}$ nach t auf.

10. **Beweisaufgabe**
    Nullstellen $x = 0$ und $x = \sqrt{a}$, Schnittpunkte $x = 0$ und $x = \sqrt{\frac{a}{2}}$.
    Die Gesamtfläche ist $\dfrac{a^2}{4}$, die obere Teilfläche $\dfrac{a^2}{8}$, und das ist die Hälfte der Gesamtfläche.

11. **Fläche halbieren**
    $y = 1.7667$

2.4. Angewandte Aufgaben

1. **Kurventangente (Aus einer Prüfung)**
   $\dfrac{512}{2125}$ oder etwa 24.09%

2. **Rampe**
   $1\,\mathrm{m}^3$.
   Hinweis: Wähle S als Koordinatenursprung. Dann hat die Parabel die Gleichung $y = \dfrac{1}{4} \cdot x^2$

3. **Funktion gesucht**
   $a = \dfrac{1}{48}$, $b = -\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

4. **Wanne**
   $85.33\,\mathrm{cm}^3 = \dfrac{256}{3}\,\mathrm{cm}^3$

2.5. Uneigentliche Integrale

1. **Flächenberechnungen**
   $\frac{1}{18}$

2. **Fläche**
   a) 13.82
   b) Die Fläche wird unendlich gross. (Die Funktion geht zwar gegen Null, aber so langsam, dass die Fläche unendlich gross wird.)

3. **Fläche unterteilen**
   $t = 2.371$.

2.6. Volumen von Rotationskörpern

1. **Rotationskörper**
   a) $\frac{128}{3} \cdot \pi$ =134.041. (Die Nullstelle ist bei $x = 16$.)
   b) $\frac{162}{5} \cdot \pi = 101.788$. (Die Nullstelle ist bei $x = 3$.)

2. **Liegender Becher**
   $t = 0.279$

3. **Rotationskörper** ($4 + 3$ **Punkte)**
   a) Es ist ein liegender Kelch, welcher rechts aussen zugespitzt ist. $V = \frac{32}{3} \cdot \pi$.
   b) $t = \frac{4}{3}$

4. **Zwei Funktionen (Aus einer Prüfung)**
   a) 81 : 175
   b) $\frac{243}{14} \cdot \pi = 54.5291$

5. **Zwei spezielle Rotationskörper (Aus einer Prüfung)**
   a) $\frac{11}{3} \cdot \pi$.
   Hinweis: Der Körper ist unendlich lang.
   b) $\frac{256}{3} \cdot \pi$.
   Hinweis: Die Funktionen sind $y = \sqrt{25 - x^2}$ und $y = 3$, die Integrationsgrenzen sind ± 4

6. **Beweisaufgabe**

Das Trapez rotiert um die x-Achse.
Dann ist die begrenzende Funktion

$y = f(x) = \frac{r_2 - r_1}{h} \cdot x + r_1.$

Setze alles in die Formel ein.