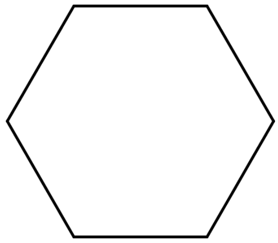
5. Kreisfläche und -umfang

1. **Reguläres Sechseck**

   Wir betrachten Durchmesser und Umfang.



2. **Bemerkungen und Historisches**

   Wir haben also festgestellt, dass für ein Sechseck das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser genau 3 beträgt. Dieses Verhältnis ist übrigens dimensionslos, d.h. es ist einfach die Zahl 3, ohne Einheit. Schliesslich hat man cm (vom Umfang) durch cm (vom Durchmesser) dividiert. Das Verhältnis von 3 ist natürlich von der Grösse des Sechsecks unabhängig, d.h. egal, wie gross das Sechseck ist, das Verhältnis von Umfang zum Durchmesser beträgt immer 3.

   Wenn wir uns nun ein 12-eck vorstellen, dann erkennen wir, dass das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser auch wieder eine konstante Zahl ist. Diese Zahl muss minim grösser sein als 3, weil man zwischen jeweils zwei Eckpunkten des Sechsecks immer noch einen Eckpunkt einfügt. Das vergrössert den Umfang, ändert aber den Durchmesser nicht.

   Archimedes hat vor 2000 Jahren diese Berechnungen bis zum 96-eck weitergeführt.

   Selbstverständlich ist auch für den Kreis das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser wieder eine konstante Zahl. Sie beträgt ungefähr 3.14159265.

3. **Umfang des Kreises**

   Wir definieren als Kreiszahl π das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises. So erhalten wir die Formeln:

4. **Zitat aus der Bibel**

   Dann machte Hiram das so genannte Meer, ein gegossenes Becken mit einem Durchmesser von fünf Metern. Seine Höhe betrug zweieinhalb Meter, und eine Schnur von 15 Metern Länge umspannte es.

5. **Näherungswerte für π**

Die Kreiszahl π ist eine der wichtigsten Konstanten in der Mathematik, aber auch in anderen technischen Bereichen. Daher war es sehr früh wichtig, diese Zahl genau berechnen zu können. Heute weiss man, dass π eine sogenannte transzendente Zahl ist, d.h. man *kann π gar nicht* als Bruchzahl (oder auch mit Quadratwurzeln etc.) schreiben. Ihre Dezimalbruchentwicklung 3.14159285358979... hat keine Regelmässigkeit.

Gute Näherungswerte für π sind beispielsweise $\frac{22}{7}$ oder $\frac{355}{113}$. Der erste Bruch ist seit der Antike bekannt, den zweiten hat man erst viel später gefunden.

6. **Grundaufgaben**

a) Wie gross ist der Umfang eines Kreises vom Radius 11.3 cm?

b) Der Umfang eines Kreises sei 22 m. Wie gross ist sein Durchmesser?

c) Berechne den Erdradius. Wir nehmen die Erde als Kugel an und rechnen mit einer Äquatorlänge von 40 000 km.

7. **Erstaunliches**

a) Der grosse Zeiger einer Uhr ist 1.8 cm lang. Welchen Weg legt die Spitze des Zeigers in einem Jahr (365 Tage) zurück?

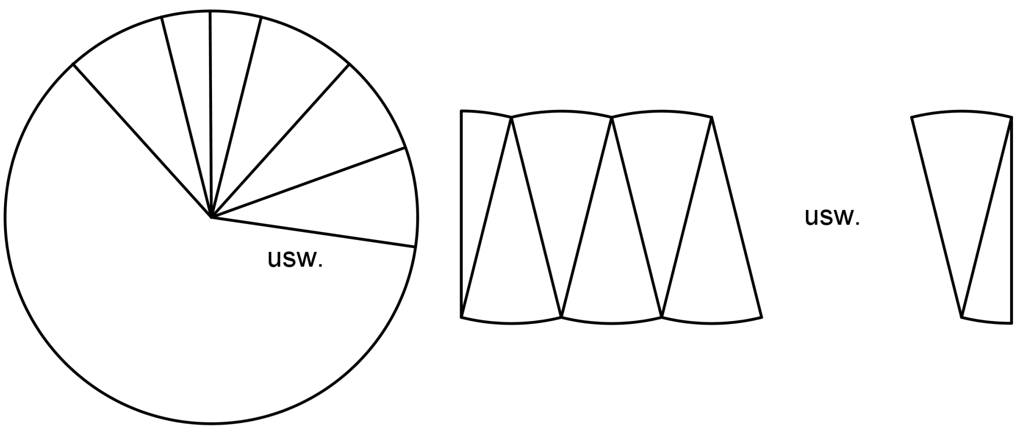
b) Welchen Weg legt ein Punkt auf dem Erdäquator (Erdradius $r = 6370$ km) aufgrund der Erdrotation in einer Sekunde zurück?

8. **Schätzaufgabe**

Wir nehmen an, die Erde sei eine Kugel mit Radius 6370 km. Wir denken uns nun eine Schnur um den Äquator gespannt. Dann verlängern wir diese Schnur um nur 10 Meter und lockern sie so, dass sie überall gleich weit von der Erde entfernt ist.
Wie weit ist die Schnur dann von der Erdoberfläche weg? Kann eine Ameise unten durch kriechen? Oder kann eine Maus, eine Katze, ein Tiger, ein Mensch oder ein Pferd unten durch gehen? Schätze zunächst und rechne dann.

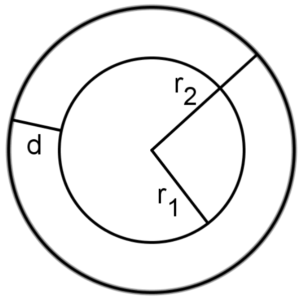
9. **Fläche des Kreises**

Die Fläche des Kreises berechnen wir mit einer Näherungsfigur:



10. **Grundaufgaben**
    a) Gesucht ist die Fläche des Kreises, dessen Radius $\mathrm{r} = 73\,\mathrm{cm}$ beträgt.
    b) Wie gross ist der Radius des Kreises, wenn die Fläche $\mathrm{F} = 34\,\mathrm{cm}^2$ misst?
    c) Welchen Umfang hat ein Kreis mit $1\,\mathrm{m}^2$ Fläche?

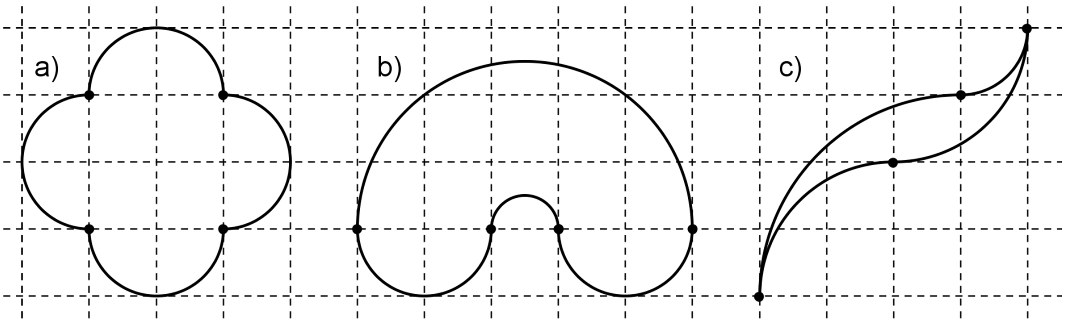
11. **Anwendung: Kreisring**
    Betrachte die nebenstehende Figur. Die zwischen den Kreisen eingeschlossene Fläche heisst Kreisring. Der innere Kreis hat Radius r_1, der äussere Radius r_2.



    a) $r_1 = 5\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 8\,\mathrm{cm}$.
    Berechne die Fläche des Kreisrings.
    b) $r_2 = 15\,\mathrm{cm}$. Berechne den Abstand d der Kreise, wenn die Gesamtfläche durch den inneren Kreis genau halbiert werden soll.
    c) Man kennt die Kreisumfänge $u_1 = 28\,\mathrm{cm}$ und $u_2 = 30\,\mathrm{cm}$. Berechne den Abstand d der Kreise.

12. **Halb- und Viertelskreise**

Berechne Umfang und Fläche der dargestellten Figuren.
Das quadratische Gitter hat 10 cm Einheit.



Lernkontrolle

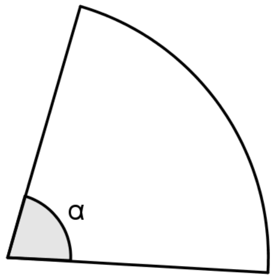
a) Welche Fläche hat ein Kreis mit Umfang 2 m?

b) Welchen Umfang hat ein Kreis mit Fläche 2 m^2?

c) Welche Fläche hat ein Viertelskreis mit Umfang 2 m?
Hinweis: Beim Viertelskreis gehören die Radien zum Umfang dazu.

d) Welchen Umfang hat ein Viertelskreis mit Fläche 2 m^2?

13. **Anwendung: Kreissektor**



In der Figur bezeichnen wir den Zentriwinkel, den Radius, den Bogen (auch Bogenlänge) und die Sektorfläche. Dann gilt:

14. **Übungen**

a) $r = 4\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 75°$. Berechne Fläche und Umfang des Sektors.

b) $r = 5\,\mathrm{cm}$, $F = 30\,\mathrm{cm}^2$. Berechne b und α.