# 2. Berechnungen

## 2.1. Geraden

1. **Bemerkung**

   Die Gleichung einer Geraden lautet grundsätzlich $y = m \cdot x + v$, oder umgeschrieben $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ und wird im Grundlagenfach ausführlich behandelt. Daher betrachten wir nur wenige Beispiele.

2. **Mittelsenkrechte**

   Gegeben sind die Punkte $A\ (2\,|\,5)$ und $B\ (4\,|\,9)$ .
   Wir zeigen, dass alle Punkte, welche von $A$ und $B$ gleiche Entfernung haben, auf einer Geraden liegen.

3. **Mittelparallele**

   Bestimme die Mittelparallele zu $y = 2x + 6$ und $y = 2x - 8$

   Der Abstand eines beliebigen Punktes zu einer Geraden ist nicht so einfach zu bestimmen, wenn die Gerade keine spezielle Lage hat.

## 2.2. Kreisgleichungen

1. **Kreis mit Zentrum im Koordinatenursprung**

   Wir suchen eine Gleichung, welche *genau* von den Punkten auf dem Kreis mit Zentrum $(0|0)$ und Radius $r$ erfüllt wird.

2. **Allgemeine Kreisgleichung**

   Das Zentrum hat Koordinaten $M(m_1|m_2)$ . Der Kreis hat Radius $r$.

3. **Bestimmen von Mittelpunkt und Radius**

   Wenn man Mittelpunkt und Radius kennt, dann kann man die Kreisgleichung hinschreiben. Die umgekehrte Richtung ist schwieriger: Bestimme Mittelpunkt und Radius des Kreises $k : x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$.

4. **Übungen**

Bestimme Mittelpunkt und Radius:

a) $x^2 + y^2 + 2x + 14y - 14 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 - x - 3y - 1 = 0$

5. **Anwendung**

Bestimme die Gleichung für den Kreis, auf dem alle Punkte liegen, welche von $(0\,|\,0)$ doppelt so weit entfernt sind wie von $(3\,|\,0)$ .

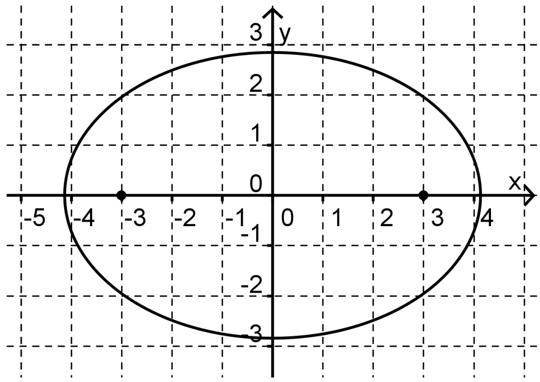
## 2.3. Ellipsen

### 1. Definition

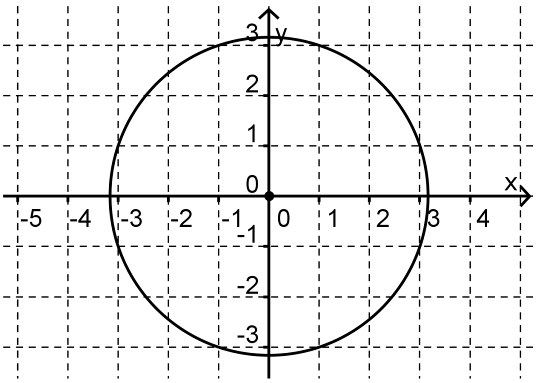
### 2. Begriffe

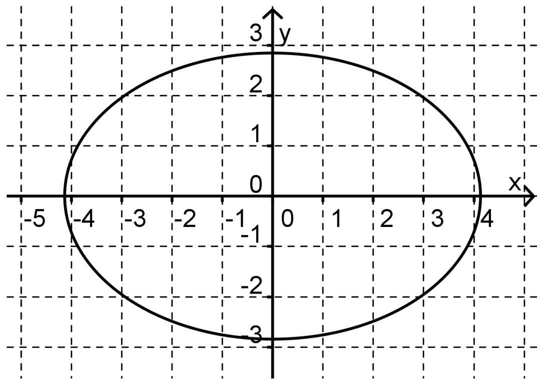
Bei einer Ellipse bezeichnen wir:

die Brennpunkte: $F_1$ und $F_2$
die lange Halbachse: $a$
die kurze Halbachse: $b$
die lineare Exzentrizität: $e$
und die vier Scheitelpunkte.

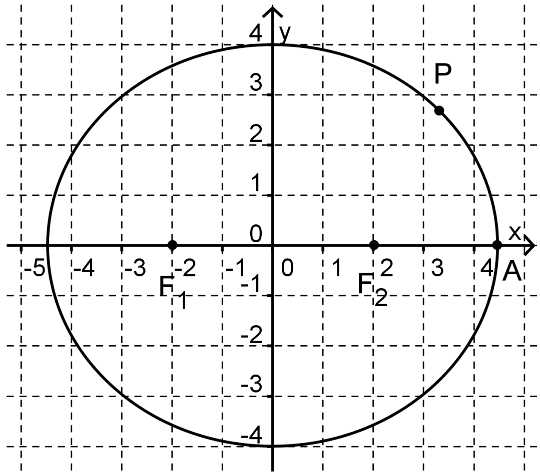



### 3. Kreisgleichung und Ellipsengleichung



4. **Herleitung der Ellipsengleichung**

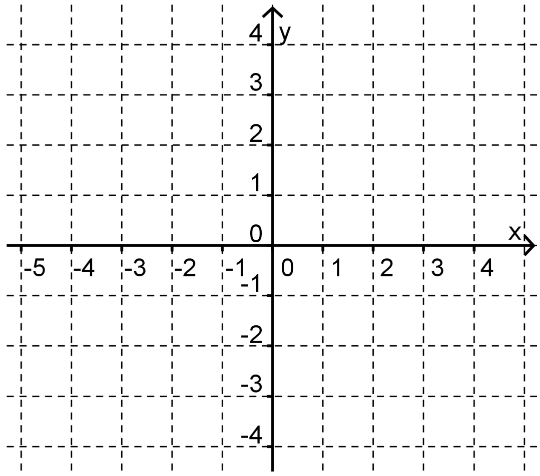



Wir halten in der Figur fest:
Die konstante Summe der beiden Abstände eines Ellipsenpunktes zu den Brennpunkten ist genau $2a$. Das sieht man am Punkt $A$.
Weiter gilt $a^2 = e^2 + b^2$. Das sieht man am Schnittpunkt der Ellipse mit der $y$-Achse.
Nun betrachten wir einen beliebigen Punkt $P(\,x\,|\,y\,)$ auf der Ellipse und rechnen die Summe beiden Abstände zu den Brennpunkten aus.
Die entstandene Gleichung müssen wir umformen, um die vermutete Ellipsengleichung zu erhalten.

## 5. Musterbeispiele

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

b) Wie gross ist die lineare Exzentrizität der Ellipse mit $a = 25$ und $b = 7$?




Wir halten fest:

## 6. Ellipsengleichung

(ohne Beweis:) Wenn das Zentrum einer Ellipse im Punkt $(\, m_1 \,|\, m_2 \,)$ ist, dann lautet die Ellipsengleichung $\dfrac{(x-m_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y-m_2)^2}{b^2} = 1$.

## 7. Musterbeispiel

$x^2 + 2y^2 - 2x - 3 = 0$

8. **Musterbeispiel**

Die Gleichung einer Ellipse lautet $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$.
Bestimme das Ellipsenzentrum, die Längen der Halbachsen, die lineare Exzentrizität sowie die Koordinaten der Brennpunkte und der Scheitelpunkte.

9. **Übungen**

a) $16x^2 + 25y^2 - 64x + 150y - 111 = 0$

b) $5x^2 + 9y^2 - 40x - 54y - 19 = 0$

10. **Musterbeispiel**

$$\frac{(x+9)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

11. **Alles inklusive**

$$9x^2 + 5y^2 - 108x + 40y + 359 = 0$$

**Lernkontrolle**

$$5x^2 + y^2 - 50x + 8y + 121 = 0$$

12. **Aufgabe**

Diese Aufgabe haben wir im ersten Kapitel konstruktiv gelöst:
Alle Punkte, welche von $P\ (\,3\,|\,0\,)$ halb so weit entfernt sind wie von der $y$-Achse, liegen auf einer Ellipse.
Berechne diese Ellipse.

## 2.4. Hyperbeln

1. **Berechnung**
   Welche Punkte sind von $P\ (\,3\,|\,0\,)$ doppelt so weit entfernt sind wie von der $y$-Achse?

2. **Übung**
   $5x^2 - 4y^2 - 30x - 8y + 21 = 0$

3. **Lage der Hyperbel**
$4x^2 - 5y^2 + 16x + 10y + 31 = 0$

**Lernkontrolle**
Berechne jeweils die Art der Kurve und möglichst alle Bestimmungsstücke.

a) $3x^2 - y^2 - 6x - 6y - 3 = 0$
b) $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$
c) $16x^2 - 9y^2 - 192x + 54y + 351 = 0$
d) $16x^2 + 16y^2 - 48x - 8y - 43 = 0$
e) Wo liegen alle Punkte, die von $(\,0\,|\,4\,)$ dreimal so weit entfernt sind wie von der $x$-Achse?