6. Funktionen verknüpfen, Kettenregel

6.1. Technik des Differenzierens

1. **Technik des Differenzierens**
   Bestimme die Ableitungen ohne Taschenrechner.

   a) $y = f(x) = \sqrt{\sin(x) + \pi}$

   b) $y = f(x) = \sin(3 \cdot \sqrt{x})$

2. **Technik des Differenzierens (Aus einer Prüfung)**
   Bestimme ohne Taschenrechner die erste Ableitung.

   a) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}$

   b) $f(x) = x^3 \cdot \cos(3x)$

   c) $f(x) = \sqrt{\sin(x^2 + 1) + 1}$

6.2. Anwendungen

1. **Kurvendiskussion**
   Führe für $y = f(x) = x \cdot \sqrt{6 - x}$ eine Kurvendiskussion durch.

2. **Definitionsbereich**
   Bestimme den Definitionsbereich der Funktion $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{5 - x^2}}{x^2 - 2}$.

3. **Schnittwinkel**
   In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneiden sich die Funktionen
   $y = f_1(x) = \dfrac{2}{x}$ und $y = f_2(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

4. **Parameter**
   Gegeben ist $y = f(x) = x \cdot \sqrt{t - x^2}$
   Die Funktionskurve soll das Maximum in einer Höhe von höchstens $y = 5$ haben.
   Wie gross darf t sein?

5. **Kurvennormale**
   Lege vom Punkt $P(\,3\,|\,0\,)$ aus das Lot auf die Kurve $y = f(x) = \sqrt{2 + x^2}$ und bestimme den Lotfusspunkt.

6. **Kurvennormale**
   In welchem Punkt der Kurve $y = \left(\dfrac{2}{3} \cdot x - 2\right) \cdot \sqrt{x + 3}$ muss man die Kurvennormale errichten, damit diese durch den Koordinatenursprung geht?

7. **Kurvenbetrachtung (Aus einer Prüfung)**
   Gegeben ist $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-2}}{x}$.
   a) Führe eine Kurvendiskussion durch.
   Bestimme Definitionsbereich, Nullstellen, Extremalstellen, Wendepunkt (Näherungswerte!)
   b) Bestimme die Gleichung der Kurvennormalen im Kurvenpunkt $(\,1 \mid \ldots\,)$

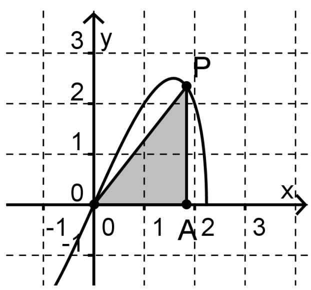
8. **Kurvenschar**
   Für $t > 0$ ist durch $y = f_t(x) = 2x \cdot \sqrt{t-x}$ eine Funktion gegeben.
   a) Setze $t = 3$ und führe eine Kurvendiskussion durch.
   b) Bestimme die Gleichung der Funktion, auf der alle Maxima liegen.

9. **Kurvenschar (Aus einer Prüfung)**
   Für $t > 0$ ist $y = f_t(x) = (x-t) \cdot \sqrt{x}$ gegeben.
   Die beiden Teilaufgaben sind unabhängig.
   a) Bestimme die Koordinaten des Minimums, abhängig von t.
   Bestimme dann die Gleichung der Kurve, auf der alle diese Minima liegen.
   b) Die Kurve $y = f_t(x)$ soll die x-Achse im Winkel $\alpha = 30°$ schneiden.
   Wie gross ist t?

10. **Maximaler Umfang**
    Einem Halbkreis vom Radius 1 wird ein Rechteck einbeschrieben.
    Bestimme die Höhe des Rechtecks mit maximalem Umfang.

11. **Maximale Fläche**
    Ein Kirchenfenster bestehe aus einem Rechteck der Breite $2r$ und der Höhe r mit aufgesetztem Halbkreis (vom Radius r).
    Wie breit ist das einbeschriebene Rechteck mit maximalem Flächeninhalt?

12. **Extremalwerte (Aus einer Prüfung)**
    Die Figur zeigt die Funktion $y = x \cdot \sqrt{5-x^2}$ mitsamt Kurvenpunkt P.
    Durch P, seine Projektion auf die x-Achse A und den Koordinatenursprung wird ein Dreieck festgelegt.



    a) Das Dreieck rotiert um die x-Achse. Der so entstehende Kegel soll maximales Volumen erhalten.
    Berechne die Koordinaten von P und das maximal mögliche Volumen.
    b) Das Dreieck rotiert um die y-Achse. Wo muss P liegen, damit der entstehende Körper maximales Volumen erhält?