6. Funktionen verknüpfen, Kettenregel

6.1. Technik des Differenzierens

1. **Technik des Differenzierens**

   a) $y = f(x) = \sqrt{\sin(x) + \pi} = (\sin(x) + \pi)^{\frac{1}{2}}$.

   $y' = f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x) + \pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x) + \pi}}$

   b) $y' = f'(x) = \cos(3 \cdot \sqrt{x}) \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

2. **Technik des Differenzierens (Aus einer Prüfung)**

   a) $f'(x) = x^3 + x^{-\frac{5}{4}}$

   b) $f'(x) = 3x^2 \cdot \cos(3x) - x^3 \cdot \sin(3x) \cdot 3$

   c) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x^2 + 1) + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(x^2 + 1) \cdot 2x$

6.2. Anwendungen

1. **Kurvendiskussion**

   $\mathbb{D} = \{x | x \leq 6\}$, $N_1(\,0\,|\,0\,)$, $N_2(\,6\,|\,0\,)$, Maximum $(\,4\,|\,4\sqrt{2}\,)$, keinen Wendepunkt

2. **Definitionsbereich**

   $\mathbb{D} = \{x | -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}\} \backslash \{\pm\sqrt{2}\}$

3. **Schnittwinkel**

   $S(\,2\,|\,1\,)$, $\alpha = 90°$

4. **Parameter**

   $t \leq 10$.

   Hinweis: Die Koordinaten des Maximums sind $(\,\frac{\sqrt{2t}}{2}\,|\,\frac{t}{2}\,)$.

5. **Kurvennormale**

   $y = -1.374x + 4.123$, $L(\,1.5\,|\,2.062\,)$

6. **Kurvennormale**

   Es gibt drei Lösungen: $(\,2\,|\,-1.4907\,)$, $(\,-1.5\,|\,-3.674\,)$ und $(\,-3\,|\,0\,)$

7. **Kurvenbetrachtung (Aus einer Prüfung)**

   a) $\mathbb{D} = \{x | x \geq \frac{2}{3}\}$, $N(\,\frac{2}{3}\,|\,0\,)$, Maximum $(\,\frac{4}{3}\,|\,\frac{3}{4}\sqrt{2}\,)$, $W(\,2.103\,|\,0.987\,)$.

   b) $(\,1\,|\,1\,)$, $y = -2x + 3$

8. **Kurvenschar**
   a) $\mathbb{D} = \{x | x \leq 3\}$, keine Symmetrie,
   $N_1(\,0\,|\,0\,)$, $N_2(\,3\,|\,0\,)$, Maximum $(\,2\,|\,4\,)$, keinen Wendepunkt.
   b) $y = \sqrt{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}$.

9. **Kurvenschar (Aus einer Prüfung)**
   a) $M(\,\frac{t}{3}\,|\,-\frac{2\sqrt{3} \cdot t^{\frac{3}{2}}}{9}\,)$, $y = -2 \cdot x^{\frac{3}{2}}$.
   b) $t = \frac{1}{3}$.

10. **Maximaler Umfang**
    $h = \frac{\sqrt{5}}{5}$

11. **Maximale Fläche**
    $b = \sqrt{3} \cdot r$.
    Hinweis: Wähle beispielsweise x für die halbe Breite. Dann ist die Höhe r plus der obere Teil im Halbkreis, den man mit Pythagoras berechnet.

12. **Extremalwerte (Aus einer Prüfung)**
    a) $P(\,\sqrt{3}\,|\,\sqrt{6}\,)$, $V = 2\pi \cdot \sqrt{3} = 10.883$.
    b) $P(\,\frac{\sqrt{15}}{2}\,|\,\frac{5}{4}\sqrt{3}\,)$
    Hinweis: Rechne den umschreibenden Zylinder minus den Kegel, der oben herausgeschnitten wird.