5. Gebrochen rationale Funktionen

5.1. Produkt- und Quotientenregel

1. **Technik des Differenzierens, Produktregel**
   Bestimme y' und y''.

   a) $y = x^4 \cdot \cos(x)$
   b) $y = (x^2 + 7x - 22)^{12}$
   c) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

2. **Technik des Differenzierens, Quotientenregel**
   Bestimme y' und y''.

   a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
   b) $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$

3. **Technik des Differenzierens (Aus einer Prüfung)**
   Löse ohne Taschenrechner.

   a) Gegeben ist $y = f(x) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$. Bestimme $y' = f'(x)$.
   b) Gegeben ist $y = f(x) = x^3 \cdot \cos(x)$. Bestimme $y' = f'(x)$.
   c) Gegeben ist $y = f(x) = (x^3 + t \cdot x^2 + 1)^5$. Bestimme $y' = f'(x)$.
   d) Gegeben ist $y = f(x) = \dfrac{x^2}{2x - 5}$. Bestimme $y' = f'(x)$ und $y'' = f''(x)$.
   Die zweite Ableitung muss nicht vereinfacht werden.

5.2. Kurvenbetrachtungen

1. **Kurvendiskussion, Grundsituation**
   Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch.

   a) $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x - 3}$
   b) $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$
   c) $y = f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 + 3}$
   d) $y = f(x) = \dfrac{1}{x^4 - x^2}$

2. **Kurvendiskussion (Aus einer Prüfung)**
   $y = f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{4x^2}$. Führe eine Kurvendiskussion durch.
   Verlangt werden: Definitionsbereich, Nullstellen, Polstellen, Asymptoten und die Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte inkl. Begründung, um was für einen Kurvenpunkt es sich handelt. Beispiel: Minimum $(\sqrt{2} \,|\, \frac{2}{3})$, weil ...

3. **Kurvendiskussion (Aus einer Prüfung)**
   Führe eine Kurvendiskussion durch: $y = f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.
   Gedankenstütze: Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extrema, Wendepunkte.
   Zeichne auch eine einigermassen genaue Skizze der Kurve mitsamt allen Asymptoten.

5.3. Anwendungen

1. **Wendetangente**
   Bestimme die Wendetangenten der Funktion $y = \dfrac{x}{x^2+3}$

2. **Kurvennormale**
   $y = f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1}$. Bestimme die Normale im Kurvenpunkt $(3 \,|\, \ldots)$

3. **Schnittwinkel**
   In welchen Punkten und unter welchen Winkeln schneiden sich die beiden Kurven $y = f(x) = \dfrac{6}{x^2+5}$ und $y = g(x) = \dfrac{1}{x}$?

4. **Schnittpunkt und Berührpunkt (Aus einer Prüfung)**
   Gegeben sind die beiden Funktionen $y = f_1(x) = x - \dfrac{8}{x}$ und $y = f_2(x) = \dfrac{x^2-12}{x^2}$.
   a) Die beiden Kurven schneiden sich in einem Punkt P und berühren sich in einem Punkt Q. Bestimme die Koordinaten dieser Punkte.
   b) Berechne den Schnittwinkel im Punkt P
   c) Berechne die Gleichung der gemeinsamen Kurventangente im Punkt Q.

5. **Parameter bestimmen**
   Eine Funktion $y = \dfrac{x^2 + a \cdot x + b}{x^2}$ hat den Wendepunkt $(2 \,|\, 0)$. Bestimme a und b.

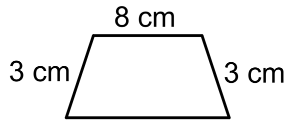
6. **Zwei Wendetangenten**
   Für welchen Wert von $t > 0$ schneiden sich die beiden Wendetangenten an die Kurve zu $y = \dfrac{1}{x^2+t}$ rechtwinklig?

7. **Minimaler Umfang**

   Ein Kreissektor der Fläche $10\,\mathrm{cm}^2$ soll minimalen Umfang haben.
   Wie gross ist der Radius und der Zentriwinkel?

8. **Extremalwertaufgaben (Aus einer Prüfung)**

   Gegeben ist das nebenstehend skizzierte gleichschenklige Trapez. (Die Skizze ist nicht massstäblich.)

   Die beiden Teilaufgaben sind unabhängig.

   a) Wie lang muss die fehlende längste Trapezseite sein, damit die Trapezfläche maximal wird. Bestimme diese maximal mögliche Fläche.

   b) Das Trapez rotiert um seine längste Seite. Wie lang muss diese sein, damit das Volumen des entstehenden Körpers maximal wird?

9. **Kurve aller Extremalwerte (Aus einer Prüfung)**

   Für $t \neq -1$ ist durch $y = f(x) = \dfrac{x^2 + t}{x - 1}$ eine Kurve gegeben.

   a) Zeige, dass alle diese Kurven unabhängig von t die gleichen Asymptoten haben.

   b) Für welche Werte von t gibt es (lokale) Extremas? Bestimme die Koordinaten dieser Punkte, abhängig von t.

   c) Auf welcher Kurve liegen alle diese Extremalpunkte?

10. **Kurve aller Wendepunkte**

    Für $k > 0$ ist durch $y = f_k(x) = \dfrac{2k}{x^2 + k^2}$ eine Kurve gegeben.
    Alle Wendepunkte liegen auf einer weiteren Kurve, deren Gleichung gesucht ist.

11. **Beweisaufgabe**

    $y = f(x) = x \cdot \sqrt{t^2 + x}$. Dabei ist $t \neq 0$.
    Weise nach, dass eine solche Kurve nie einen Wendepunkt haben kann.