5. Gebrochen rationale Funktionen

5.1. Produkt- und Quotientenregel

1. **Technik des Differenzierens, Produktregel**

   Der Taschenrechner fasst die Ergebnisse eventuell anders zusammen.

   a) $y' = 4x^3 \cdot \cos(x) - x^4 \cdot \sin(x)$
   $y'' = (12x^2 - x^4) \cdot \cos(x) - 8x^3 \cdot \sin(x)$

   b) $y' = 12 \cdot (x^2 + 7x - 22)^{11} \cdot (2x + 7) = (24x + 84) \cdot (x^2 + 7x - 22)^{11}$
   $y'' = 24 \cdot (x^2 + 7x - 22)^{11} + (24x + 84) \cdot 11 \cdot (x^2 + 7x - 22)^{10} \cdot (2x + 7)$

   c) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}$

   $$y' = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2x}{3} \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}}$$

   $$y'' = \frac{2}{3} \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2x}{3}(-\frac{2}{3}) \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{5}{3}} \cdot 2x$$

2. **Technik des Differenzierens, Quotientenregel**

   Der Taschenrechner fasst möglicherweise verschiedenartig zusammen.

   a) $$y' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

   $$y'' = \frac{4(x^2 + 1)^2 - 4x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4}$$

   b) $$y' = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

   $$y'' = \frac{(\cos(x) - x \cdot \sin(x) - \cos(x)) \cdot x^2 - (x \cdot \cos(x) - \sin(x)) \cdot 2x}{x^4}$$

3. **Technik des Differenzierens (Aus einer Prüfung)**

   a) $y = f(x) = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}} = 4 \cdot x^{-\frac{1}{3}}$. $y' = f'(x) = -\dfrac{4}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}}$.

   b) $y' = f'(x) = 3x^2 \cdot \cos(x) - x^3 \cdot \sin(x)$.

   c) $y = f(x) = (x^3 + t \cdot x^2 + 1)^5$. Bestimme $y' = f'(x) = 5 \cdot (x^3 + t \cdot x^2 + 1)^4 \cdot (3x^2 + 2t \cdot x)$.

   d) $$y' = f'(x) = \frac{2x \cdot (2x - 5) - 2x^2}{(2x - 5)^2} = \frac{2x^2 - 10x}{(2x - 5)^2}$$

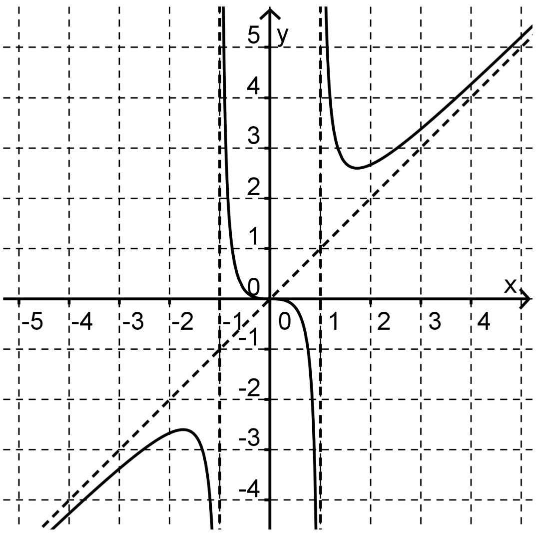
   $$y'' = f''(x) = \frac{(4x - 10)(2x - 5)^2 - (2x^2 - 10x) \cdot 2(2x - 5) \cdot 2}{(2x - 5)^4}.$$

5.2. Kurvenbetrachtungen

1. **Kurvendiskussion, Grundsituation**
   a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{3\}$, $N(\,0\,|\,0\,)$ doppelt, gleichzeitig Maximum,
   Polstelle und vertikale Asymptote $x = 3$, schräge Asymptote $y = x + 3$,
   Minimum $(\,6\,|\,12\,)$, keine Wendepunkte.
   b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{1\}$, Nullstellen $(\,-2\,|\,0\,)$ und $(\,2\,|\,0\,)$, gleichzeitig Maximum,
   Polstelle und vertikale Asymptote $x = 1$, schräge Asymptote $y = x + 1$,
   Weder Extrema noch Wendepunkte.
   c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, gerade Funktion (achsensymmetrisch), $N(\,0\,|\,0\,)$ doppelt, gleichzeitig Minimum,
   keine Polstelle, keine vertikale Asymptote, horizontale Asymptote $y = 4$,
   Wendepunkte $(\,\pm 1\,|\,1\,)$.
   d) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{-1, 0, 1\}$, gerade Funktion (achsensymmetrisch), keine Nullstellen
   Polstelle und vertikale Asymptoten $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$,
   horizontale Asymptote $y = 0$,
   Maxima $(\,\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,|\,-4\,)$, keine Wendepunkte.

2. **Kurvendiskussion (Aus einer Prüfung)**
   $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $N(\,2\,|\,0\,)$ dreifach, gleichzeitig Terrassenpunkt,
   Polstelle und vertikale Asymptote $x = 0$, schräge Asymptote $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$,
   Maximum $(\,-4\,|\,-\frac{27}{8}\,)$, weil $y''(-4) = -\frac{9}{64} < 0$.

3. **Kurvendiskussion (Aus einer Prüfung)**
   $\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$, ungerade Funktion (punktsymmetrisch)
   $N(\,0\,|\,0\,)$ dreifach, gleichzeitig Terrassenpunkt,
   Polstellen und vertikale Asymptoten $x = \pm 1$, schräge Asymptote $y = x$,
   Extrema $(\,\pm\sqrt{3}\,|\,\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}\,)$, keine weiteren Wendepunkte.



5.3. Anwendungen

1. **Wendetangente**

   Die Kurve hat drei Wendepunkte mit den Tangenten $y = -\frac{1}{24}x - \frac{3}{8}$, $y = \frac{1}{3}x$ und $y = -\frac{1}{24}x + \frac{3}{8}$

2. **Kurvennormale**

   Kurvenpunkt $(\,3\,|\,2.5\,)$, Normale $y = -\frac{4}{7}x + \frac{59}{14}$

3. **Schnittwinkel**

   $S_1(\,5\,|\,\frac{1}{5}\,)$ mit $\alpha_1 = 1.523°$, $S_2(\,1\,|\,1\,)$ mit $\alpha_2 = 26.565°$

4. **Schnittpunkt und Berührpunkt (Aus einer Prüfung)**

   a) $P(\,-3\,|\,-\frac{1}{3}\,)$, $Q(\,2\,|\,-2\,)$

   b) 103.736°

   c) $y = 3x - 8$.

5. **Parameter bestimmen**

   $a = -3$, $b = 2$
   Hinweis: Löse $y(2) = 0$ und $y''(2) = 0$

6. **Zwei Wendetangenten**

   $t = \frac{3}{4}$
   $y''(x) = 0$ ergibt $x_W = \pm\frac{\sqrt{3t}}{3}$,
   $m_W = y'(x_w)$ ausrechnen und $m_1 \cdot m_2 = -1$ nach t auflösen.

7. **Minimaler Umfang**

   $r = 3.162\,\text{cm}$, $\alpha = 114.592°$

8. **Extremalwertaufgaben (Aus einer Prüfung)**

   Hinweis: Zeichne die Höhen durch die oberen Eckpunkte und wähle (beispielsweise) für x das kleine Stück, das auf der längsten Trapezseite weggetrennt wird.

   a) Trapezseite 9.831 cm, Fläche 25.471 cm^2.

   b) Man hat einen Zylinder und zwei Kegel mit Höhe x. Trapezseite 8.718 cm

9. **Kurve aller Extremalwerte (Aus einer Prüfung)**

   a) $x = 1$ und $y = x + 1$ sind unabhängig von t.

   b) $t > -1$. Dann sind die Extremalpunkte $(\,1 \pm \sqrt{t+1}\,|\,2 \pm 2\sqrt{t+1}\,)$

   c) $y = 2x$

10. **Kurve aller Wendepunkte**
    $y = \frac{\sqrt{3}}{2x}$

11. **Beweisaufgabe**
    $y'' = 0$ ergibt $x = -\frac{4}{3}t^2$. Einsetzen ergibt $y(-\frac{4}{3}t^2) = -\frac{4}{3}t^2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}t^2}$ und das ist für keinen Wert von t definiert.