4. Kurvenbetrachtungen

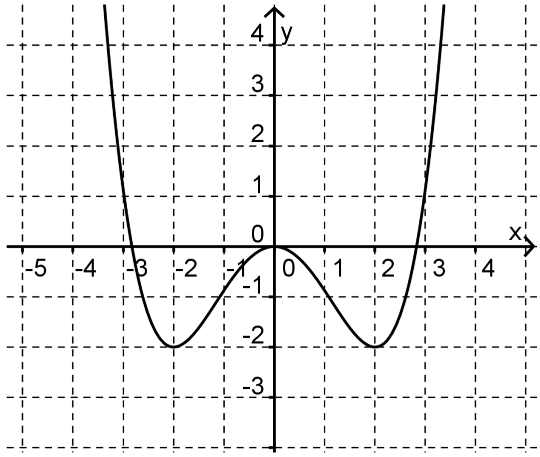
4.1. Kurvendiskussion

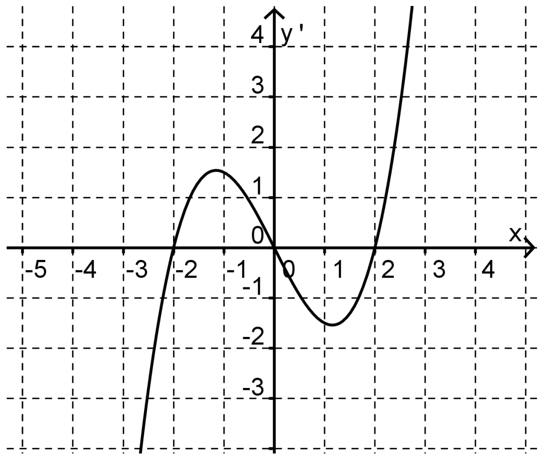
1. **Polynomfunktionen**

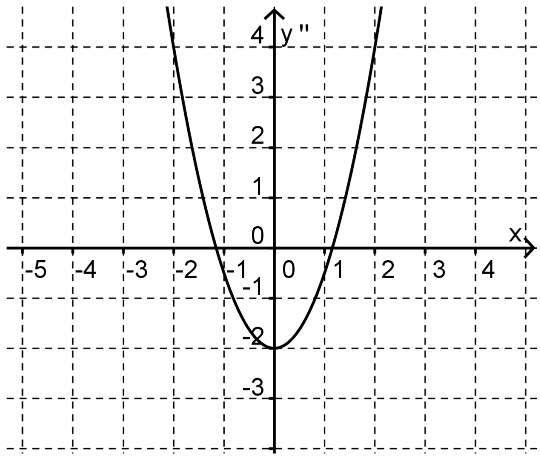
   Wir betrachten Polynomfunktionen, d.h. Funktionen der Art
   $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
   Der höchste vorkommende Exponent n heisst Grad dieser Polynomfunktion.

2. **Musterbeispiel**

   Wir untersuchen die Funktion
   $y = f(x) = \dfrac{1}{8} x^4 - x^2$
   mit Hilfe ihrer Ableitungen.



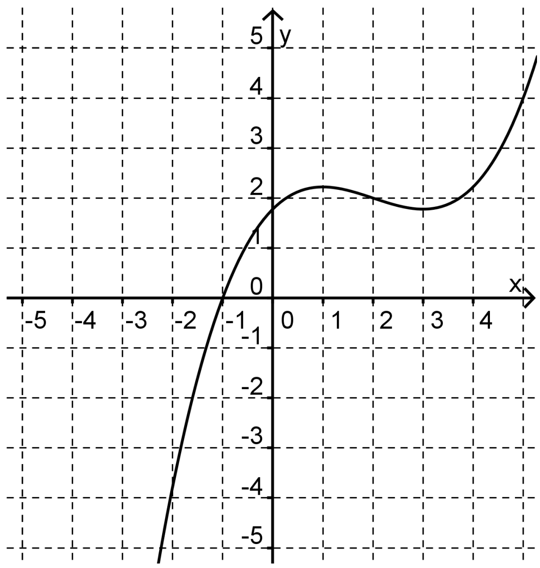




3. **Musterbeispiel**

Kurvendiskussion rechnerisch:

$$y = f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x + \frac{16}{9}$$



4. **Maximum oder Minimum?**

Wie entscheidet man rechnerisch, ob es sich bei einer Nullstelle der 1. Ableitung um ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum handelt?

Übungen

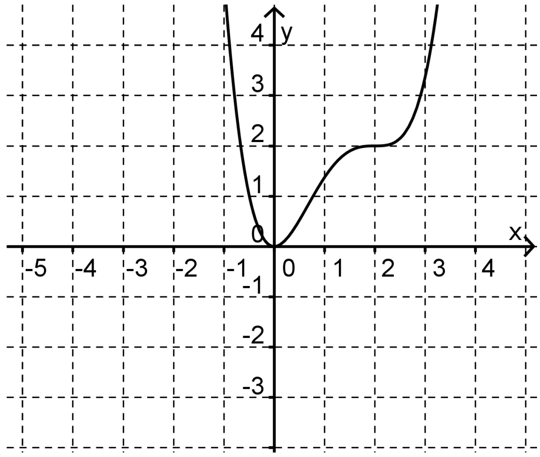
Zwei weitere Kurvendiskussionen:
Bestimme die Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte.

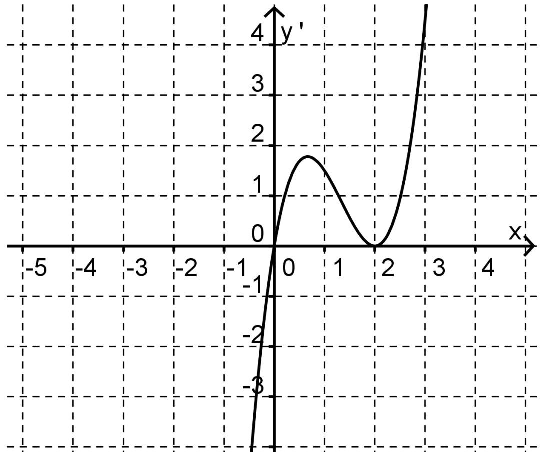
a) $y = f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5$

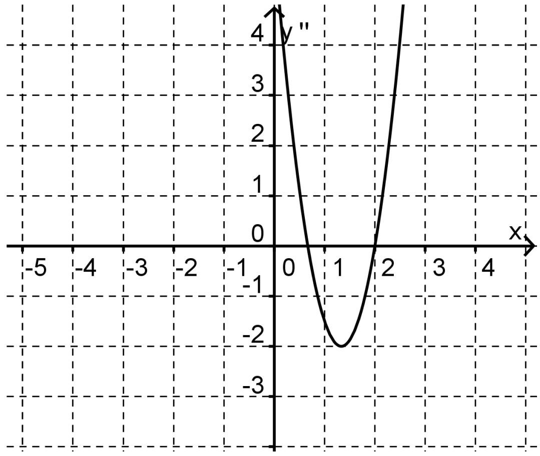
b) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$

5. Musterbeispiel

$$y = f(x) = \frac{3}{8}x^4 - 2x^3 + 3x^2$$







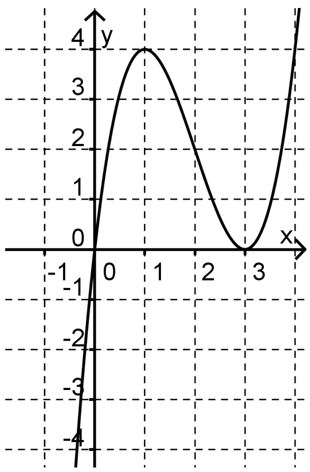
6. Zusammenfassung

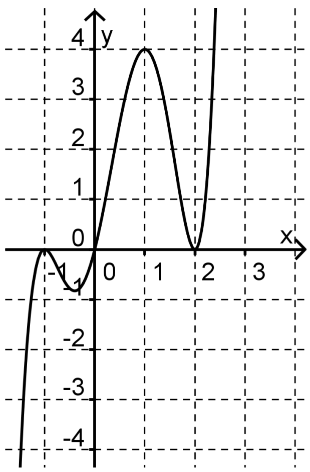
7. **Mehrfache Nullstellen**

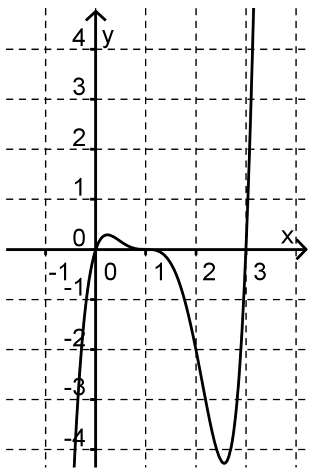
Ein Text zum Studium.
Betrachte die Funktion $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Sie hat Grad 3, aber nur zwei Nullstellen. Folglich muss eine Nullstelle eine doppelte sein.
Durch Faktorisieren stellen wir fest, dass $y = f(x) = x \cdot (x-3)^2$ gilt.
Somit ist die Nullstelle $x = 3$ doppelt, weil der Faktor $(x-3)$ doppelt vorkommt. Der Graph ist in der Figur links dargestellt.

Die Funktion $y = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x$ hat Grad 5, aber nur drei Nullstellen. Folglich muss die Funktion entweder zwei doppelte oder eine dreifache Nullstelle haben.
Faktorisieren bringt $y = x \cdot (x+1)^2 \cdot (x-2)^2$.
Somit sind die Nullstellen $x = -1$ und $x = 2$ doppelt. Der Graph ist in der Figur in der Mitte dargestellt.

Die Funktion $y = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 10x^2 + 3x$ hat ebenso Grad 5, aber nur drei Nullstellen. Mit der Faktorisierung $y = x \cdot (x-1)^3 \cdot (x-3)$ wird klar, dass die Nullstelle $x = 1$ dreifach ist. Der Graph ist in der Figur rechts dargestellt.





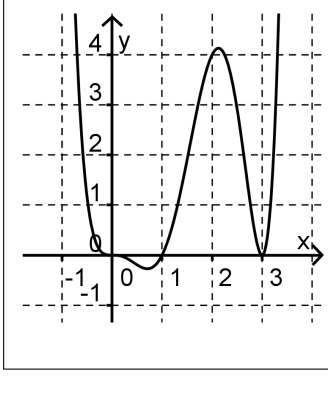


Aus den Graphen wird sofort ersichtlich, dass der Funktionsgraph bei einer einfachen Nullstelle die x-Achse schneidet, er bei einer doppelten Nullstelle die x-Achse sogar berührt. Bei einer dreifachen Nullstelle hat man einen Terrassenpunkt auf der x-Achse.

Definition: Enthält $f(x)$ den Faktor $(x-a)^n$, dann ist die Stelle $x = a$ eine n-fache Nullstelle der Funktion $f(x)$.

Gleichung gesucht

Welche Funktionsgleichung gehört zum untenstehenden Graphen?



8. **Satz**

Die Vielfachheit einer Nullstelle wird pro Ableiten um 1 kleiner.

Ein Beispiel möge illustrieren: $y = x^3$ hat die dreifache Nullstelle $x = 0$. Dann hat $y' = 3x^2$ die doppelte Nullstelle $x = 0$ und $y'' = 6x$ hat für $x = 0$ noch eine einfache Nullstelle.

Aus dem Satz ergibt sich durch logische Überlegungen:

a) Eine dreifache Nullstelle in der Funktionsgleichung muss noch eine doppelte Nullstelle in der ersten Ableitung sein (also hat die Kurve dort eine horizontale Tangente) und muss ebenso noch eine einfache Nullstelle in der zweiten Ableitung sein (also hat man dort einen Wendepunkt). Und ein Wendepunkt mit horizontaler Kurventangente ist ein Terrassenpunkt (der in diesem Fall auf der x-Achse liegt).

b) Eine doppelte Nullstelle in der Funktionsgleichung muss noch eine einfache Nullstelle in der ersten Ableitung sein. Somit wird die x-Achse dort berührt (ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt, ist egal), weil es in der zweiten Ableitung keine Nullstelle mehr sein kann und somit sicher kein Wendepunkt ist.

c) Eine einfache Nullstelle in der Funktionsgleichung ergibt einen Schnittpunkt (und keinen Berührpunkt) mit der x-Achse. Denn man hat dann sicher keine Nullstelle in der ersten Ableitung (sonst wäre es eine doppelte Nullstelle gewesen). Man kann allerdings in der zweiten Ableitung an genau dieser Stelle wieder eine Nullstelle haben. Dann ist es ein Wendepunkt (aber kein Terrassenpunkt) auf der x-Achse.

d) Und schliesslich bedeutet eine doppelte Nullstelle in der ersten Ableitung (welche nicht Nullstelle der Funktion war), dass man einen (nicht auf der x-Achse liegenden) Terrassenpunkt hat.

Ausserdem wechselt die Funktion bei einer einfachen und dreifachen Nullstelle das Vorzeichen (d.h. geht auf die andere Seite der x-Achse, bei einer doppelten (theoretisch auch bei einer vierfachen) Nullstelle jedoch nicht.

Höhere als dreifache Nullstellen lassen wir aber ausser Betracht.

4.2. Symmetrische Funktionsgraphen

1. **Beispiele**

   Betrachte die Kurven zu den folgenden Funktionen. Einige Kurven sind symmetrisch, andere nicht. Überlege bei jedem Beispiel, ob die Kurve symmetrisch ist, und wenn ja, welcher Art die Symmetrie ist. (Vielleicht musst du bei einigen Beispielen das Grafik-Fenster anpassen.)

   a) $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ ....

   b) $y = f(x) = x^6 - 7x^4 + 10x^2$ ....

   c) $y = f(x) = x^4 + 2x^3 + x$ ....

   d) $y = f(x) = x^5 - 5x^3$ ....

   e) $y = f(x) = 2x^7 - 8x^3 + 3x$ ....

   f) $y = f(x) = x^8 - 2x^5 + x^2$ ....

2. **Verallgemeinerung**

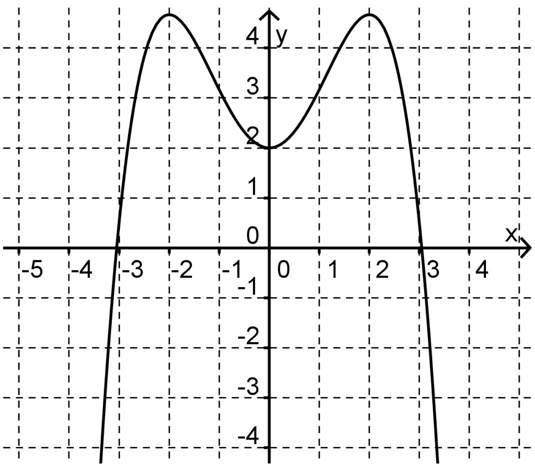
   Eine Polynomfunktion hat einen zur y-Achse symmetrischen Graphen, wenn ....

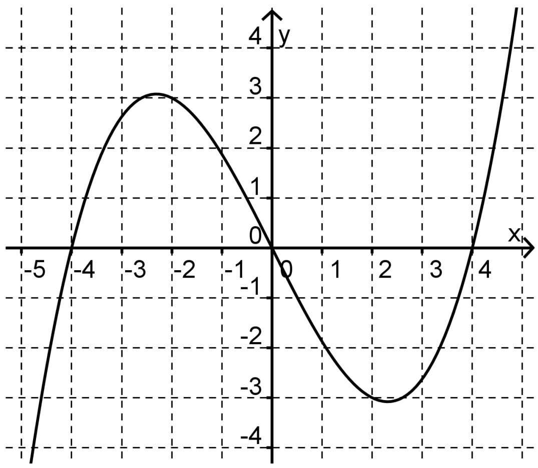
   ....

   Eine Polynomfunktion hat einen zum Koordinatenursprung ....

   ....

3. **Gerade und ungerade Funktionen**





4.3. Kurven bestimmen

1. **Musterbeispiel**

   Bestimme eine Polynomfunktion 3. Grades, welche folgende Bedingungen erfüllt: Die Funktion geht durch den Punkt $(3|4)$ und besitzt dort die Steigung $m = 9$. Weiter soll die Kurve in $(0|4)$ ein lokales Maximum haben.

2. **Übung**

   Bestimme eine Polynomfunktion 4. Grades, welche die x-Achse im Ursprung berührt, in $(1|1)$ ein Maximum besitzt und durch $(2|-1)$ geht.

3. **Übung**

Bestimme eine Polynomfunktion 3. Grades, welche ihr Maximum auf der y-Achse hat und in $(1\,|\,3)$ den Wendepunkt mit Steigung -2 aufweist.

4. **Übung**

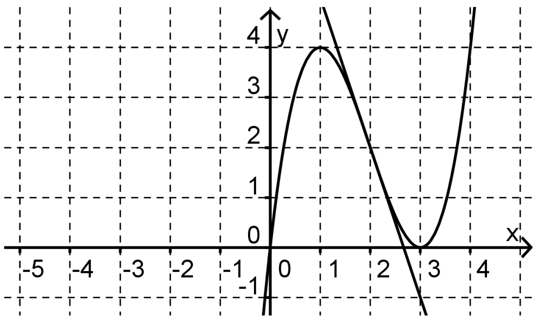
Eine zur y-Achse symmetrische Polynomfunktion 4. Grades geht durch den Ursprung und schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 3$ unter einem Winkel von $45°$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

5. **Übung**

Eine zum Ursprung punktsymmetrische Polynomfunktion 5. Grades hat in $(1\,|\,4)$ einen Terrassenpunkt. Wie lautet die Funktionsgleichung?

6. **Wendetangente**
Bestimme die Gleichung der Wendetangente von $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Die Wendetangente hat eine besondere Eigenschaft: Normalerweise liegt die Funktionskurve auf *einer* Seite einer Tangente, weil die Tangente die Kurve berührt (und nicht schneidet). Das gilt aber für die Wendetangente nicht, weil die Kurve im Berührpunkt die Krümmung ändert. Der Berührpunkt bleibt aber Berührpunkt (auch wenn die Kurve auf beiden Seiten der Tangente liegt). Im Wendepunkt haben Kurve und Wendetangente nämlich denselben Funktionswert, die gleiche Steigung und zusätzlich sogar die gleiche Krümmung (nämlich Null).



Funktionsgleichung gesucht
Von einer Polynomfunktion 3. Grades weiss man, dass der Funktionsgraph die y-Achse im Punkt $P(0\,|\,1)$ schneidet. Der Wendepunkt befindet sich an der Stelle $x = 1$, und die Wendetangente hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{6}$.

4.4. Extremalwertaufgaben

1. **Vorbereitende Überlegungen**

   a) Mit einem Meter Schnur soll auf einem Tisch eine möglichst grosse Fläche umgrenzt werden.

   b) Welches Rechteck von 36 cm^2 Flächeninhalt hat den kleinsten Umfang?

2. **Musterbeispiel I**

   Ein Gärtner will mit 24 m Zaun eine möglichst grosse rechteckige Fläche entlang einer Mauer eingrenzen. Wie hat er vorzugehen?

3. **Musterbeispiel II**

   Von einem quadratischen Stück Karton von 12 cm Seitenlänge werden in den 4 Ecken gleich grosse Quadrate weggeschnitten. Aus dem übrigbleibenden Stück Karton wird eine Schachtel (ohne Deckel) geformt. Wie gross müssen die Seiten der wegzuschneidenden Quadrate sein, damit die Schachtel möglichst grosses Volumen erhält und wie gross ist dieses?

4. **Musterbeispiel III**

   Ein zylindrisches Gefäss (mit Boden, aber ohne Deckel) soll einen Liter Inhalt fassen und aus möglichst wenig Blech hergestellt werden. Wie hoch wird das Gefäss?

5. **Lösungsschema für Extremalwertaufgaben**
   a) Wähle eine Grösse x.
   b) Drücke die extremal zu machende Grösse (…) durch x und ev. Konstanten aus.
   c) Für ein Extremum muss …… sein.
   d) Prüfe die Lösung und beantworte die Fragen.

6. **Musterbeispiel IV**
   Welche Punkte der Parabel $y = x^2 - 8$ haben vom Ursprung extremalen Abstand?

7. **Musterbeispiel V**
   Einer Kugel vom Radius r ist ein Drehzylinder von möglichst grossem Volumen einzubeschreiben. Wie hoch wird der Zylinder?

Romanisches Fenster
Ein Fenster besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis. Das Fenster hat $1\,\mathrm{m}^2$ Fläche. Wie gross ist der Umfang mindestens?