Rechnen in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

1. Natürliche Zahlen

1.1. Grundrechenoperationen

1. **Definition**

   ....

   ....

2. **Die Menge der natürlichen Zahlen**

   $\mathbb{N} =$ ....

3. **Addition**

   Wir schreiben $a + b = c$ ....

   ....

4. **Subtraktion**

   Wir schreiben $a - b = c$ ....

   ....

5. **Multiplikation**

   Wir schreiben $a \cdot b = c$ ....

   ....

6. **Division**

   Wir schreiben $a : b = c$, oder besser $\frac{a}{b} = c$ ....

   ....

7. **............**

   Wir schreiben $a^b = c$ ....

   ....

8. **Abgeschlossenheit**

   Welche der Grundoperationen sind innerhalb $\mathbb{N}$ abgeschlossen?
   Anders gefragt: Wann ist das Ergebnis auch eine natürliche Zahl?

1.2. Rechnen mit natürlichen Zahlen

1. **Klassifizierung der Rechenoperationen**

   Operationen erster Stufe: ....

   Operationen zweiter Stufe: ....

   Operationen dritter Stufe: ....

2. **Kommutativgesetz**

   Addition: ....

   ....

   Multiplikation: ....

   ....

3. **Assoziativgesetz**

   Addition: ....

   Multiplikation: ....

4. **Distributivgesetz**

   ....

   ....

5. **Kleine Knacknuss**

6. **Operationen gleicher Stufe**

   a) $2 + 17 - 4 - 7 =$ ....

   b) $3 \cdot 8 \cdot 5 : 12 \cdot 7 =$ ....

7. **Rechenregel**

   Operationen gleicher Stufe ....

   ....

8. **Operationen verschiedener Stufen**
   a) $3 + 4 \cdot 5 - 6 + 7 \cdot 2 =$ ....
   b) $6 + 8 \cdot 2^3 =$ ....

9. **Rechenregel**

   ....

   ....

10. **Musterbeispiele**
    a) $5 + 4 \cdot 3^2 =$ ....

    ....

    b) $3 + 24 : 6 - 1 + 3 \cdot 2^3 =$ ....

    ....

    c) $15 - 2 \cdot 3 + 4^2 - 3 \cdot 5 =$ ....

    ....

11. **Übungen**
    a) $17 + 2 \cdot 5^2 =$
    b) $105 - 3 \cdot 2^3 =$
    c) $13 + 28 : 7 - 12 + 5 \cdot 2^3 =$
    d) $85 - 7 \cdot 3 + 6^2 - 13 \cdot 5 =$
    e) $120 - 63 : 9 - 26 - 3 \cdot 2^4 =$
    f) $96 - 6 \cdot 7 + 4^3 + 3 \cdot 15 =$

12. **Klammern**

    $2 \cdot 3^3 + 13 - (15 - 7) + (16 - 3 \cdot 4) - 25 - 2 \cdot (3 + 7) =$ ....

    ....

13. **Klammerregel I**

    ....

    ....

14. **Übung**

    a) $14 + 28 : 7 - 3 + 2 \cdot 3^2 =$

    b) $(14 + 28) : 7 - 3 + (2 \cdot 3)^2 =$

    c) $14 + 28 : (7 - 3) + 2 \cdot 3^2 =$

15. **Verschachtelte Klammern**

    $2 \cdot (3^3 + 13) - [(15 - 7) + (16 - 3 \cdot 4)] - [25 - 2 \cdot (3 + 7)] =$ ....

    ....

    ....

    ....

16. **Klammerregel II**

    ....

    ....

    ....

17. **Übung (Thema mit Variationen)**

a) $15 + 25 : 5 + 3^2 + 2 \cdot 3 =$

b) $(15 + 25) : (5 - 3)^2 + 2 \cdot 3 =$

c) $\{[(15 + 25) : (5 + 3)]^2 + 2\} \cdot 3 =$

d) $((15 + 25) : 5 + (3^2 + 2)) \cdot 3 =$

18. **Das KLAPOPUSTRI**

Lernkontrolle

a) $7 + 6 \cdot 5 - 4 \cdot 3^2 =$

b) $7 + 6 \cdot 5 + (4 \cdot 3)^2 =$

c) $7 + 6 \cdot (5 + 4) \cdot 3^2 =$

d) $(7 + 6) \cdot 5 + 4 \cdot 3^2 =$

e) $(7 + 6 \cdot 5 - 4 \cdot 3)^2 =$

1.3. Primzahlen, Teilbarkeit

1. **Beispiel**
   Wir zerlegen die Zahl 378 in Faktoren:

2. **Potenzschreibweise**

3. **Satz**

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

4. **Technik der Primfaktorzerlegung**
   Wir zerlegen 252 in Primfaktoren:

5. **Übung**

   Zerlege in Primfaktoren und notiere in Potenzschreibweise:
   36, 48, 61, 64, 108, 1116, 27000.

6. **Tipps und Tricks**

   Beginne möglichst mit kleinen Primfaktoren.

   Eine Null am Ende der Zahl ....

   ....

7. **Definition**

   ....

   ....

   ....

8. Teilbarkeitsregeln

Eine (natürliche) Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ……………………………………

……………………………………………………………………………

durch 3: ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

durch 4: ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

durch 5: ……………………………………………………………………

durch 6: ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

durch 8: ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

durch 9: ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

durch 10: ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

9. Weitergehende Teilbarkeitsregeln

Eine (natürliche) Zahl ist durch 12 teilbar, wenn ……………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

durch 15: ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

durch 18: ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

10. **Überlegungsaufgabe**

Mit der Primfaktorzerlegung können wir schnell bestimmen, ob eine Zahl Teiler ist von einer anderen.
Gegeben ist eine grosse Zahl $x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$.

a) Ist 6 ein Teiler dieser Zahl?

b) Ist $16 = 2^4$ ein Teiler dieser Zahl?

c) Ist $63 = 3^2 \cdot 7$ ein Teiler dieser Zahl?

d) Ist $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ ein Teiler dieser Zahl?

11. **Der ggT**

Mit der Primfaktorzerlegung können wir den grössten gemeinsamen Teiler (ggT) zweier oder mehrerer Zahlen relativ einfach bestimmen.

36 = ...

....

60 = ...

....

Also ist der ggT ....

12. **Satz**

Den ggT findet man mit der Primfaktorzerlegung ....

....

....

....

....

13. **Übungen**

Bestimme den ggT der Zahlen

a) 50 und 70.
b) 48 und 64.
c) 105 und 72.
d) 16 und 25.
e) 42, 60 und 98.
f) 3960, 1680 und 5400.

14. **Überlegungsaufgabe**

Manchmal ist die Primfaktorzerlegung zum Bestimmen des ggT gar nicht nötig: Bestimme den ggT von 144 und 145.

15. **Vielfache**

Gegeben ist eine grosse Zahl $x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$.

a) Ist $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ ein Vielfaches dieser Zahl?
b) Ist $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11^4$ ein Vielfaches dieser Zahl?
c) Ist $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ ein Vielfaches dieser Zahl?
d) Ist $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 31 \cdot 53$ ein Vielfaches dieser Zahl?

16. **Das kgV**

Mit der Primfaktorzerlegung können wir das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier oder mehrerer Zahlen relativ einfach bestimmen.

$36 =$ ....

$60 =$ ....

Also ist das kgV ....

17. **Satz**

Das kgV findet man mit der Primfaktorzerlegung ....

....

....

....

....

18. **Übungen**

Für diese 6 Übungen sind die gleichen Zahlen vorgegeben wie weiter vorne.
Bestimme auch noch das kgV.

a) 50 und 70.
b) 48 und 64.
c) 105 und 72.
d) 16 und 25.
e) 42, 60 und 98.
f) 3960, 1680 und 5400.

Lernkontrolle

Bestimme ggT und kgV der Zahlen

a) 26 und 28
b) 44, 55 und 77.
c) 143 und 145.
d) 45, 105 und 135.
e) 380, 420, 480 und 500.