Rechnen in \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q}

1. Natürliche Zahlen

1.	1.	$\mathbf{Grundrec}$	henopera	tionen

1.	Definition
2.	Die Menge der natürlichen Zahlen
	$\mathbb{N}=\dots$
3.	Addition
	Wir schreiben $a+b=c$
4.	Subtraktion
	Wir schreiben $a - b = c$
5.	Multiplikation
•	Wir schreiben $a \cdot b = c$
6.	Division
0.	Wir schreiben $a:b=c$, oder besser $\frac{a}{b}=c$
	· ·
_	
7.	**************************************
	Wir schreiben $a^b = c$
8.	Abgeschlossenheit
	Welche der Grundoperationen sind innerhalb N abgeschlossen? Anders gefragt: Wann ist das Ergebnis auch eine natürliche Zahl?

1.2. Rechnen mit natürlichen Zahlen

1	Klassifizierung	der	Recheno	nerationen
Ι.	Massinziei ung	uei	recheno	peranonen

Operationen erster Stufe:

Operationen zweiter Stufe:

Operationen dritter Stufe:

2. Kommutativgesetz

Multiplikation:

.....

3. Assoziativgesetz

Addition:

Multiplikation:

4. Distributivgesetz

.....

5. Kleine Knacknuss



6. Operationen gleicher Stufe

- a) $2+17-4-7=\dots$
- b) $3 \cdot 8 \cdot 5 : 12 \cdot 7 = \dots$

7. Rechenregel

8. Operationen verschiedener Stufen

a)
$$3+4\cdot 5-6+7\cdot 2=\dots$$

b)
$$6 + 8 \cdot 2^3 = \dots$$

9. Rechenregel

.....

10. Musterbeispiele

a)
$$5 + 4 \cdot 3^2 = \dots$$

.....

b)
$$3+24:6-1+3\cdot 2^3=\dots$$

.....

c)
$$15 - 2 \cdot 3 + 4^2 - 3 \cdot 5 = \dots$$

.....

11. Übungen

a)
$$17 + 2 \cdot 5^2 =$$

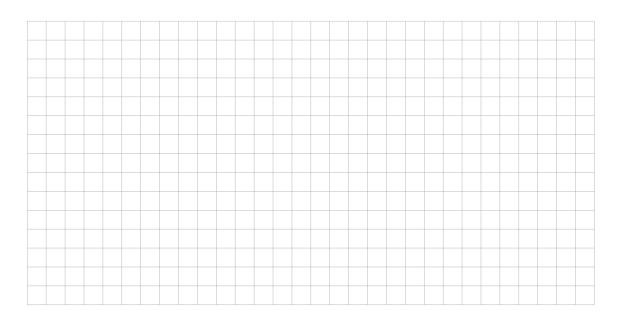
b)
$$105 - 3 \cdot 2^3 =$$

c)
$$13 + 28 : 7 - 12 + 5 \cdot 2^3 =$$

d)
$$85 - 7 \cdot 3 + 6^2 - 13 \cdot 5 =$$

e)
$$120 - 63 : 9 - 26 - 3 \cdot 2^4 =$$

f)
$$96 - 6 \cdot 7 + 4^3 + 3 \cdot 15 =$$



12. Klammern

$$2 \cdot 3^3 + 13 - (15 - 7) + (16 - 3 \cdot 4) - 25 - 2 \cdot (3 + 7) = \dots$$

13. Klammerregel I



14. Übung

a)
$$14 + 28 : 7 - 3 + 2 \cdot 3^2 =$$

b)
$$(14+28):7-3+(2\cdot 3)^2=$$

c)
$$14 + 28 : (7 - 3) + 2 \cdot 3^2 =$$



15. Verschachtelte Klammern

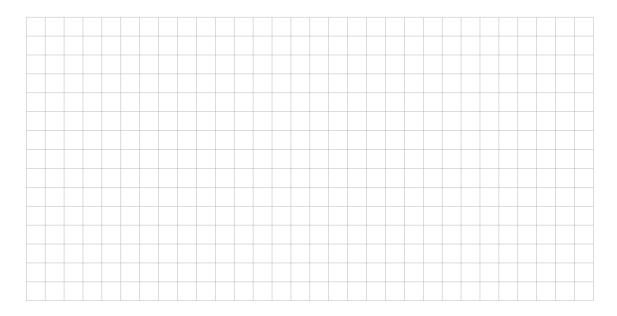
4	2 •	(3^{3}	3 -	+	1	3)) -	_	[((1	5	-	- '	7)) -	+	(1	6	_	 3	•	4)]	-	_	2	25) -	-	2	•	(;	3	+	- '	7)]	=	=	•	•					 			
	•		•											•				•																•											 		•				

.....

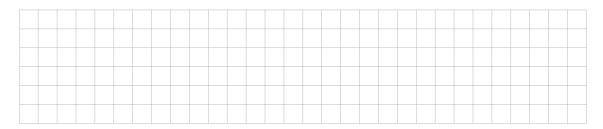
16. Klammerregel II

17. Übung (Thema mit Variationen)

- a) $15 + 25 : 5 + 3^2 + 2 \cdot 3 =$
- b) $(15+25):(5-3)^2+2\cdot 3=$
- c) $\{[(15+25):(5+3)]^2+2\}\cdot 3=$
- d) $((15+25):5+(3^2+2))\cdot 3=$



18. Das KLAPOPUSTRI



Lernkontrolle

- a) $7 + 6 \cdot 5 4 \cdot 3^2 =$
- b) $7 + 6 \cdot 5 + (4 \cdot 3)^2 =$
- c) $7 + 6 \cdot (5 + 4) \cdot 3^2 =$
- d) $(7+6) \cdot 5 + 4 \cdot 3^2 =$
- e) $(7+6\cdot 5-4\cdot 3)^2 =$

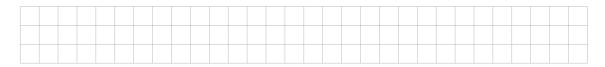
1.3. Primzahlen, Teilbarkeit

1. Beispiel

Wir zerlegen die Zahl 378 in Faktoren:



2. Potenzschreibweise



\circ	α ,
-<	Satz

		 				•		 			•		•	 	•		•								•						 		
•		 						 																			 				 		
		 				 •		 			•		•		•				 						•		 				 		

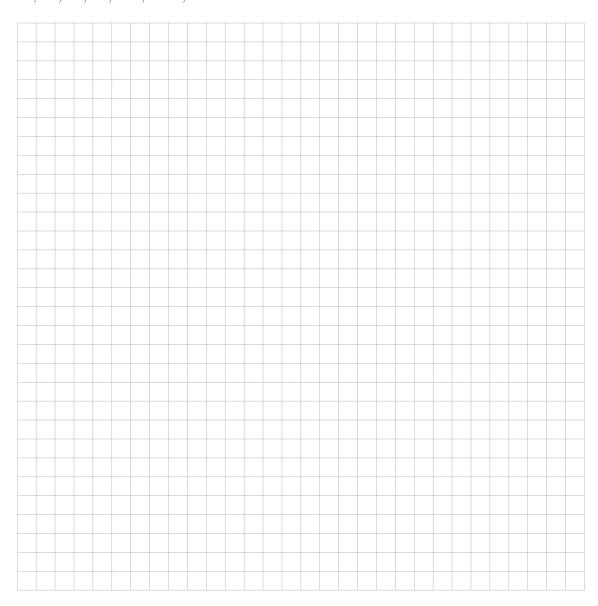
4. Technik der Primfaktorzerlegung

Wir zerlegen 252 in Primfaktoren:



5. Übung

Zerlege in Primfaktoren und notiere in Potenzschreibweise: $36,\,48,\,61,\,64,\,108,\,1116,\,27000.$



C	77:		The : -1
6.	LIDDS	una	Tricks
0.	TIPPS	and	TI I CILD

	Beginne möglichst mit kleinen Primfaktoren.
	Eine Null am Ende der Zahl
7.	Definition

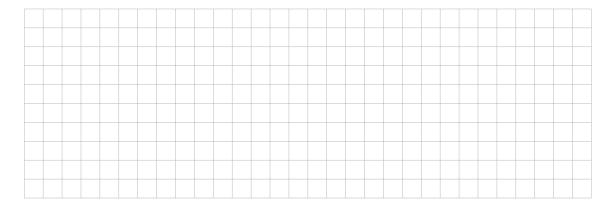
8.	Teilbarkeitsregeln
	Eine (natürliche) Zahl ist durch 2 teilbar, wenn
	durch 3:
	durch 4:
	durch 5:
	durch 6:
	durch 8:
	durch 9:
	durch 10:
9.	Weitergehende Teilbarkeitsregeln
	Eine (natürliche) Zahl ist durch 12 teilbar, wenn
	durch 15:
	durch 18:

10. Überlegungsaufgabe

Mit der Primfaktorzerlegung können wir schnell bestimmen, ob eine Zahl Teiler ist von einer anderen.

Gegeben ist eine grosse Zahl $x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$.

- a) Ist 6 ein Teiler dieser Zahl?
- b) Ist $16 = 2^4$ ein Teiler dieser Zahl?
- c) Ist $63 = 3^2 \cdot 7$ ein Teiler dieser Zahl?
- d) Ist $990 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ ein Teiler dieser Zahl?



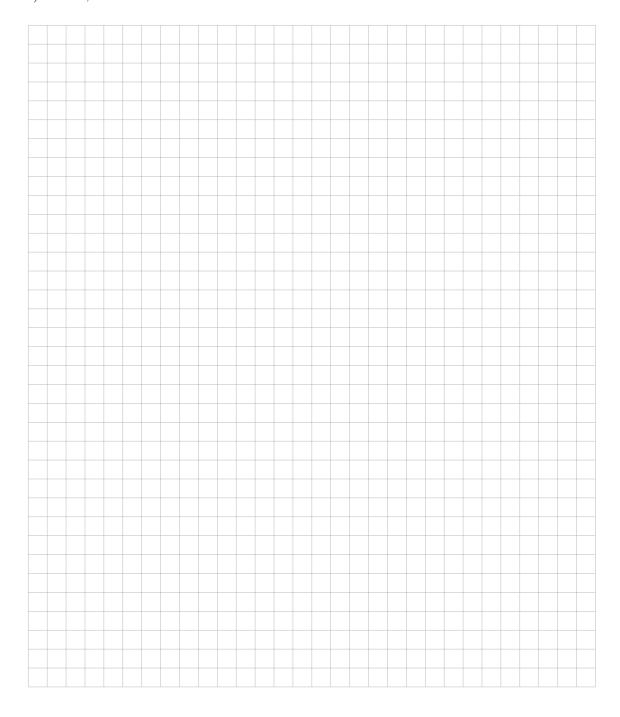
11. Der ggT

	Mit der Primfaktorzerlegung können wir den grössten gemeinsamen Teiler (ggT) zweier oder mehrerer Zahlen relativ einfach bestimmen.
	36 =
	$60 = \dots$
	Also ist der ggT
12.	Satz
	Den ggT findet man mit der Primfaktorzerlegung

13. Übungen

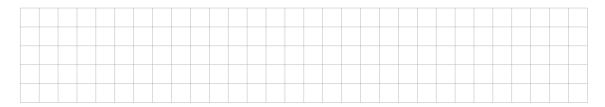
Bestimme den ggT der Zahlen

- a) 50 und 70.
- b) 48 und 64.
- c) 105 und 72.
- d) 16 und 25.
- e) 42, 60 und 98.
- f) 3960, 1680 und 5400.



14. Überlegungsaufgabe

Manchmal ist die Primfaktorzerlegung zum Bestimmen des ggT gar nicht nötig: Bestimme den ggT von 144 und 145.



15. Vielfache

Gegeben ist eine grosse Zahl $x=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11.$

- a) Ist $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ ein Vielfaches dieser Zahl?
- b) Ist $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11^4$ ein Vielfaches dieser Zahl?
- c) Ist $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$ ein Vielfaches dieser Zahl?
- d) Ist $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 31 \cdot 53$ ein Vielfaches dieser Zahl?



16. Das kgV

Mit der Primfaktorzerlegung können wir das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier oder mehrerer Zahlen relativ einfach bestimmen.

| 36 = | | | |
 |
|------|--------|------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 60 = | | | |
 |
| Also | ist da | s kg | V |
 |

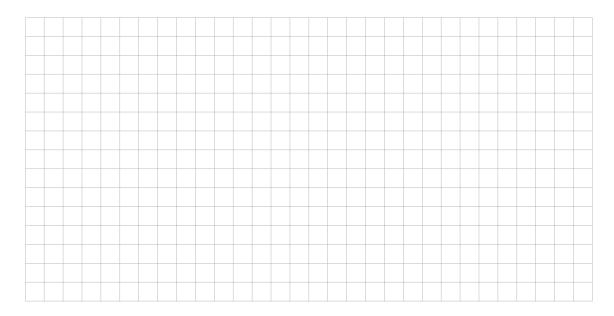
17. Satz

Das	kgV	fir	idet	t m	an	mi	tc	ler	Pı	im	fal	ktc	orz	erl	egi	ıng	 	 						 		 	
		• • •				• • •					• •				• •		 • •	 • •	• • •	• • •	• •	• •	• •	 • •	• • •	 • •	

18. Übungen

Für diese 6 Übungen sind die gleichen Zahlen vorgegeben wie weiter vorne. Bestimme auch noch das kg ${\rm V}.$

- a) 50 und 70.
- b) 48 und 64.
- c) 105 und 72.
- d) 16 und 25.
- e) 42, 60 und 98.
- f) 3960, 1680 und 5400.



Lernkontrolle

Bestimme ggT und kgV der Zahlen

- a) 26 und 28
- b) 44, 55 und 77.
- c) 143 und 145.
- d) 45, 105 und 135.
- e) 380, 420, 480 und 500.