Gesamtrepetition Analysis

Aufgaben aus früheren Prüfungen

1. **Kurvendiskussion (6C18)**
   Gegeben ist $y = f(x) = x \cdot \sqrt{9 - x^2}$.
   Bestimme: Definitionsbereich, Symmetrie sowie die Koordinaten aller speziellen Kurvenpunkte (Nullstellen, Extrema inkl. Nachweis, ob es sich um ein Minimum oder Maximum handelt, Wendepunkte).

$\mathbb{D} = \{ x \mid -3 \leq x \leq 3 \}$

ungerade Funktion

$N(0|0)$ $N(-3|0)$ $N(3|0)$

Min $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{2} \;\middle|\; -\frac{9}{2}\right)$ weil $f''(x) = 4 > 0$

Max $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} \;\middle|\; \frac{9}{2}\right)$ weil $f''(x) = -4 < 0$

$W(0|0)$

Die andern x-Werte sind nicht in $\mathbb{D}$.

2. **Kurvenbetrachtung (6J07)**

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \dfrac{3x^3 - 3}{x^3 + 1}$.

a) Führe eine Kurvendiskussion durch.
Gedankenstütze: Definitionsbereich, Nullstellen, Polstellen, Asymptoten sowie alle speziellen Kurvenpunkte mit Bezeichnung, beispielsweise $P(\,1\,|\,1\,)$ Maximum.

b) Ein Wendepunkt liegt auf der y-Achse. Bestimme die Gleichung der Wendetangente im *anderen* Wendepunkt.

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\left(\text{weil } x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1\right)$

$N(1\,|\,0)$ Polstelle $x = -1$

vertikale Asymptote $x = -1$

horizontale As: $y = 3$

$T(0\,|\,-3)$ Terrassenpunkt $\left(y' = 0,\ y'' = 0\right)$

$W(0.7937\,|\,-1)$

b) $m = y'(0.7937) = 5.0397$

$y = mx + v$ alles einsetzen $\Rightarrow v = -5$

Tangente $y = 5.0397 \cdot x - 5$

3. **Schnittpunkt und Zwischenwinkel (6C18)**
Die beiden Funktionen $y = f_1(x) = x^3 - 8x + 6$ und $y = f_2(x) = x^2 - 6$ schneiden sich in einem Punkt und berühren sich in einem anderen.

a) Bestimme die Koordinaten dieser beiden Punkte. Welches ist der Berührpunkt?

b) Bestimme im Schnittpunkt den spitzen Zwischenwinkel der beiden Kurven und im Berührpunkt die Gleichung der gemeinsamen Kurvennormalen.

a) $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 2$

$f_1'(-3) = 19 \qquad f_1'(2) = 4$

$f_2'(-3) = -6 \qquad f_2'(2) = 4$

$\Rightarrow S(-3 \mid 3) \qquad B(2 \mid -2)$

b) In S: $\arctan(19) - \arctan(-6)$

$= 167.525^\circ \Rightarrow \alpha = 12.475^\circ$

In B: $m_t = 4 \Rightarrow m_n = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + v$ durch $B \Rightarrow v = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$

4. **Wendetangenten (6H12)**

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \dfrac{6x^2 + 4x + 1}{(x+1)^3}$.

Bestimme den Schnittpunkt und den Zwischenwinkel der beiden Wendetangenten.

$y''(x) = 0 \Rightarrow W_1(0|1)$, $W_2\left(2\,\middle|\,\frac{11}{9}\right)$

$t_1: m = y'(0) = 1 \Rightarrow t_1: y = x + 1$

($v = 1$, weil $W_1(0|1)$ auf der y-Achse liegt)

$t_2: m = y'(2) = -\frac{5}{27}$ durch $W_2\left(2\,\middle|\,\frac{11}{9}\right)$

$\Rightarrow t_2: y = -\frac{5}{27} \cdot x + \frac{43}{27}$ (alles einsetzen $v = \frac{43}{27}$)

$t_1 = t_2 \Rightarrow S\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{3}{2}\right)$

$\alpha = \arctan(1) - \arctan\left(-\frac{5}{27}\right)$
$= 55.491°$

5. **Kurvenschar (6B11)**
Für jeden Wert von $t > 0$ ist durch $y = f_t(x) = x^4 - t \cdot x^2 + 1$ eine Kurve festgelegt.

a) Die Wendepunkte von $y = f_t(x)$ sollen auf der x-Achse liegen. Wie gross ist t und welches sind die Koordinaten der Wendepunkte?

b) Alle Wendepunkte aller dieser Kurven liegen auf einer weiteren Kurve. Bestimme deren Gleichung.

a) $y''(x) = 12x^2 - 2t = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6t}}{6}$

einsetzen $y = f(x) = 1 - \frac{5t^2}{36}$

Also Wendepunkt $W\left(\pm\frac{\sqrt{6t}}{6} \,\middle|\, 1 - \frac{5t^2}{36}\right)$

Für a) muss $y = 0$ sein $\Rightarrow t = 2.684$

und somit $W(\pm 0.66874 \mid 0)$

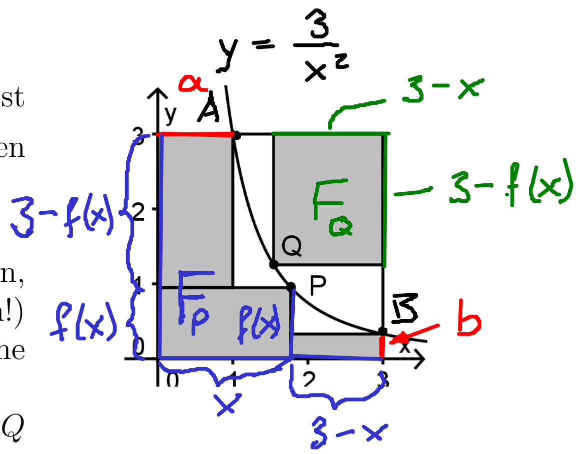
b) Löse $x = \pm\frac{\sqrt{6t}}{6}$ nach $t \Rightarrow t = 6x^2$

In y einsetzen

$\Rightarrow y = 1 - 5x^4$

6. **Maximale Fläche (6G16)**

Eine quadratische Glasplatte von 3×3 Einheiten ist entlang der Kurve $y = \dfrac{3}{x^2}$ in zwei Teile zersprungen (siehe die Skizze).
Der Glaser kann rechteckige Teile weiter verwenden.
Wie muss er die Punkte P und Q auf der Kurve wählen, damit die Fläche der Rechtecke (alle zusammen!) möglichst gross wird? Berechne die maximal mögliche Fläche dieser Rechtecke.
Hinweis: Rechne in zwei Teilaufgaben, für P und Q einzeln.



Punkt A : $\dfrac{3}{x^2} = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow a = 1$

Punkt B : $x = 3 \Rightarrow \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow b = \dfrac{1}{3}$

Für P: $(x \mid f(x)) \Rightarrow$ alle blauen Strecken

$$F_P = x \cdot f(x) + 1 \cdot (3 - f(x)) + \frac{1}{3} \cdot (3 - x)$$
$$= x \cdot \frac{3}{x^2} + \left(3 - \frac{3}{x^2}\right) + \frac{1}{3}(3 - x)$$

$F_P' = 0 \Rightarrow x = 1.57 \Rightarrow P(1.57 \mid 1.217)$, $F_P = 4.17$

Für Q : $(x \mid f(x)) \Rightarrow$ grüne Strecken

$$F_Q = (3 - x) \cdot (3 - f(x)) = (3 - x)\left(3 - \frac{3}{x^2}\right)$$

$F_Q' = 0 \Rightarrow x = 1.634 \Rightarrow Q(1.634 \mid 1.123)$ $F_Q = 2.563$

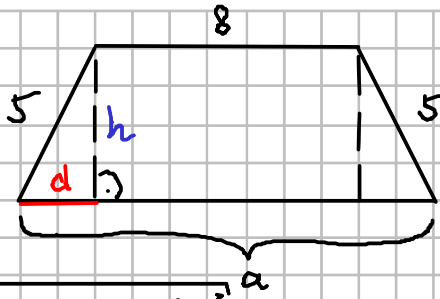
$\Rightarrow F_P + F_Q = 6.733$ max. Fläche

7. **Maximale Fläche und Volumen (6G09)**

Von einem gleichschenkligen Trapez mit parallelen Seiten a und c kennt man $c = 8\,\text{cm}$ sowie die Länge der Schenkel $b = d = 5\,\text{cm}$. (a ist die längere der beiden parallelen Seiten.)

a) Wie lang muss a sein, damit das Trapez maximale Fläche erhält?

b) Das Trapez rotiert um die Seite a und bildet so einen Körper. Wie lang muss a sein, damit dieser Körper maximales Volumen hat?



$$d = \frac{a-8}{2}$$

$$h = \sqrt{5^2 - \left(\frac{a-8}{2}\right)^2}$$

a) $$F = \text{"}m \cdot h\text{"} = \frac{a+8}{2} \cdot \sqrt{5^2 - \left(\frac{a-8}{2}\right)^2}$$

$$F'(a) = 0 \Rightarrow a = 12.124 \text{ cm}$$

b) Zylinder plus 2 Kegel

$$V = \text{"}\pi r^2 h + 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h\text{"}$$

$$= \pi h^2 \cdot 8 + \frac{2}{3} \pi h^2 \cdot d$$

$$= \pi \left(5^2 - \left(\frac{a-8}{2}\right)^2\right) \cdot 8 + \frac{2}{3} \pi \left(5^2 - \left(\frac{a-8}{2}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{a-8}{2}\right)$$

$$V'(a) = 0 \Rightarrow a = 9.8658 \text{ cm}$$

8. **Zahlenfolge (6F13)**

Eine Zahlenfolge ist rekursiv gegeben durch $a_1 = 0$; $\quad a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot a_n - 2$.

a) Berechne die Folgenglieder a_2, a_3, a_4, a_5.

b) Die explizite Definition dieser Folge hat die Form $a_n = p \cdot b^n + q$ Bestimme b, p, q.

c) Diskutiere die Folge. Gedankenstütze: Monotonie, Grenzen (inf = ?, usw.), Grenzwert (lim = ?).

a) $a_2 = \frac{1}{3} a_1 - 2 = -2$

$a_3 = \frac{1}{3} a_2 - 2 = -\frac{8}{3} \approx -2.667$

$a_4 = \frac{1}{3} a_3 - 2 = -\frac{26}{9} \approx -2.889$

$a_5 = \frac{1}{3} a_4 - 2 = -\frac{80}{27} \approx -2.963$

b) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 0 = p \cdot b + q \\ a_2 = -2 = p \cdot b^2 + q \\ a_3 = -\frac{8}{3} = p \cdot b^3 + q \end{array}\right\}$ $b = \frac{1}{3} \quad p = 9 \quad q = -3$

$a_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$

c) streng mon. fallend

max = sup = 0

kein min, aber inf = −3

lim = −3

9. **Zahlenfolgen (6C18)**

Zwei nahezu identische Texte zu Zahlenfolgen

a) Von einer AF kennt man $a_1 = 2.4, a_4 = 4.2$. Man soll möglichst viele Folgenglieder aufsummieren, aber so, dass die Summe gerade noch kleiner bleibt als 1000.
Wie viele Folgenglieder benötigt man, und wie gross ist das letzte Folgenglied a_n?

b) Von einer GF kennt man $b_1 = 2.4, b_4 = 4.2$. Man soll möglichst viele Folgenglieder aufsummieren, aber so, dass die Summe gerade noch kleiner bleibt als 1000.
Wie viele Folgenglieder benötigt man, und wie gross ist das letzte Folgenglied b_n?

a) "$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$" $\quad a_4 = 4.2 = 2.4 + 3d$

$\Rightarrow d = 0.6$

"$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$" $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} 1000 = \frac{n}{2}(2.4 + a_n) \\ a_n = 2.4 + (n-1) \cdot 0.6 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow n = 54.34$

Also 54 Folgenglieder. $a_{54} = 34.2$

b) "$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$" $\quad 4.2 = 2.4 \cdot q^3$

$\Rightarrow q = 1.20507$.

"$S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$" $\quad 1000 = 2.4 \dfrac{1-q^n}{1-q}$

$\Rightarrow n = 23.9$

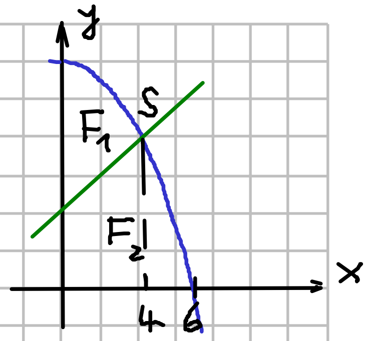
Also 23 Folgenglieder, $a_{23} = 145.375$

10. **Flächenverhältnisse (6B11)**

Betrachte die im I. Quadranten unterhalb von $y = 18 - \frac{1}{2} \cdot x^2$ liegende Fläche F.

a) In welchem Verhältnis teilt die Gerade $y = x + 6$ die Fläche F?

b) Die Gerade $y = m \cdot x + 6$ soll die Fläche F im Verhältnis 1 : 3 (von links oben nach rechts unten gerechnet) teilen. Bestimme m.



a) $18 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow N(6|0)$

$18 - \frac{1}{2}x^2 = x + 6 \Rightarrow S(4|\_)$

Gesamtfläche

$$F_1 + F_2 = \int_0^6 \left(18 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 72$$

$$F_1 = \int_0^4 \left(18 - \frac{1}{2}x^2 - (x+6)\right) dx = \frac{88}{3}$$

$$\Rightarrow F_2 = 72 - \frac{88}{3} = \frac{128}{3} \Rightarrow 88 : 128 \Rightarrow 11 : 16$$

b) Jetzt ist die Gerade $y = m \cdot x + 6$

$$18 - \frac{1}{2}x^2 = mx + 6 \Rightarrow x = \sqrt{m^2 + 24} - m$$

(der andere Wert ist negativ)

F_1 muss $\frac{1}{4}$ der Gesamtfläche sein, $F_1 = 18$.

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{m^2+24} - m} \left(18 - \frac{1}{2}x^2 - (mx + 6)\right) dx = 18$$

Im TR $\Rightarrow m = 3.0509$

11. **Technik des Integrierens (6C10)**
Die beiden Integrale sind ausführlich, *von Hand gerechnet*, herzuleiten.

a) $\displaystyle\int\left(x^3+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{\sqrt{3}}{x}\right)dx =$

b) $\displaystyle\int_1^{e} 3x^3\cdot\ln(x)\,dx = *$

a) $\displaystyle\int\left(x^3 + 3\cdot x^{-\frac{1}{3}} - \sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\right)dx$

$= \frac{1}{4}x^4 + 3\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \sqrt{3}\cdot\ln(x) + c$

b) $\left[\begin{array}{llll} f' = 3x^3 & & f = \frac{3}{4}x^4 \\ g = \ln(x) & & g' = \frac{1}{x}\end{array}\right]$

$* = \frac{3}{4}x^4\cdot\ln(x)\Big|_1^e - \displaystyle\int_1^e \frac{3}{4}x^4\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= \frac{3}{4}x^4\cdot\ln(x)\Big|_1^e - \displaystyle\int_1^e \frac{3}{4}x^3\,dx$

$= \frac{3}{4}x^4\cdot\ln(x) - \frac{3}{16}x^4\Big|_1^e$

$= \left(\frac{3}{4}e^4 - \frac{3}{16}e^4\right) - \left(0 - \frac{3}{16}\right)$

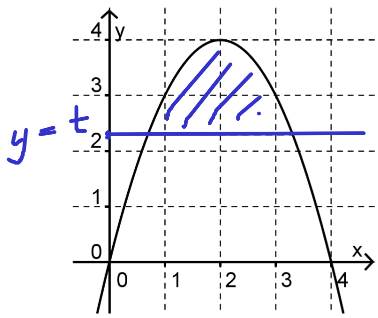
$\left[\begin{array}{l}\ln(e) = 1\\ \ln(1) = 0\end{array}\right]$

$= \frac{9}{16}e^4 + \frac{3}{16}$

$y = 4x - x^2$

12. **Rotationskörper (6J07)**

Die Skizze rechts zeigt den Bogen der Kurve $y = 4x - x^2$. Die im I. Quadranten unter der Kurve liegende Fläche rotiert um die x-Achse und bildet so einen Rotationskörper.



a) Berechne das Volumen dieses Körpers.

b) Dieser Körper wird nun zentral durchbohrt, d.h. die Bohrung erfolgt entlang der x-Achse. (Siehe dazu die gestrichelte Linie in der Figur.) Nach der Bohrung bleibt aussen ein ringförmiger Körper übrig. Welchen Durchmesser muss der Bohrer haben, damit genau die Hälfte des Volumens weggebohrt wird?

a) $4x - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = 4$

$$V_a = \pi \int_0^4 (4x - x^2)^2 \, dx = \frac{512}{15}\pi$$

b) $y = 4x - x^2 = t \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4-t}$

$$V_b = \pi \int_{2-\sqrt{4-t}}^{2+\sqrt{4-t}} \left((4x - x^2)^2 - t^2 \right) dx = \frac{256}{15}\pi = \frac{1}{2} V_a$$

$\Rightarrow t = 2.3455$

Bohrerdurchmesser $= 2t = 4.691$